

Hoja 5: Aplicaciones lineales. Matriz de una aplicación lineal.

1. Para cada una de las aplicaciones siguientes decide, razonadamente, si es lineal o no.

i) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (2x + 3y, -5x)$.

ii) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, y^2)$.

iii) {funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ } \xrightarrow{T} {funciones $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ } , $T[f(x)] = f(\cos x)$.

iv) {funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ } \xrightarrow{T} {funciones $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ } , $T[f(x)] = \cos(f(x))$.

v) $F : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, $F(p(x)) = p(x + 1)$.

vi) $F : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, $F(p(x)) = p(x) + 1$.

vii) $\mathcal{F} : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(p(x)) = \int_{-1}^2 p(x) dx$.

viii) $F : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(A) = \det A$.

ix) $F : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $F(A) = I_2 + A$.

x) $F : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, $F(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2. De una aplicación lineal $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sabemos que $A(1, 0, 0) = -1$, $A(2, 1, 0) = 5$ y $A(3, 4, 1) = 7$. Sabiendo eso, determina $A(3, 5, -1)$.

3. Para cada $a \in \mathbb{R}$ sea $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Halla, en función de a , una base de $\text{Im } A$ y una base de $\text{ker } A$.

b) Comprueba que, para todos los valores de a , se cumple:

$$\dim(\text{Im } A) + \dim(\text{ker } A) = \dim(\text{dominio de } A).$$

4. Para el espacio vectorial \mathbb{V} de las matrices reales simétricas 2×2 , consideramos la siguiente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} .$$

a) Comprueba que $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ dada por $f(M) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - M$ es lineal y halla la matriz A de f respecto de \mathcal{B} en salida y en llegada (atención: A es 3×3).

b) Utiliza A para hallar una base de $\text{Im } f$ y una base de $\text{ker } f$ (atención: estas bases tienen que ser conjuntos de matrices simétricas 2×2).

c) Comprueba que $\dim(\text{Im } f) + \dim(\text{ker } f) = \dim(\text{dominio de } f)$.

5. Sea $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ el espacio vectorial $\{\varphi \equiv a + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$ de los polinomios reales de grado ≤ 1 .

a) Demuestra que se pueden definir dos aplicaciones $F, G : \mathbb{R}[x]_{\leq 1} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ por las siguientes fórmulas:

$$F(\varphi) = (1 + 3x)\varphi + (1 - 3x^2)\varphi' \quad , \quad G(\varphi) = (6 + 3x)\varphi + (1 - 3x^2)\varphi' .$$

b) Comprueba que F y G son lineales y halla sus matrices respecto de la base $\{1, x\}$, tanto en salida como en llegada.

c) Utiliza el resultado de b) para demostrar rápidamente que $G = \frac{3}{4}F^4 - F^3 - 5F$, es decir

$$G = \frac{3}{4}F \circ F \circ F \circ F - F \circ F \circ F - 5F .$$

6. Sea $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ el espacio vectorial $\{\varphi \equiv a + bx + cx^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ de los polinomios reales de grado ≤ 2 . Definimos una aplicación $F : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ por la fórmula $F(\varphi) = 2\varphi - (x + 1)\varphi'$.

a) Comprueba que F está bien definida y es lineal.

b) Halla la matriz A de F respecto de la base $\{2 + x, 3x, x^2\}$ en salida y la base $\{1, x, x^2\}$ en llegada.

c) Utiliza A para hallar una base de $\text{Im } F$ y una base de $\text{ker } F$ (atención: estas bases tienen que ser conjuntos de polinomios). Comprueba que $\dim(\text{Im } F) + \dim(\text{ker } F) = \dim(\text{dominio de } F)$.

7. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se define la aplicación $T_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ como $T_a(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} a \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{v}^t + \mathbf{v} [1 \ 3a]$.

a) Comprueba que T_a es lineal y halla su matriz respecto de las bases estándar de \mathbb{R}^2 y $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

b) Utiliza el resultado de a) para determinar los valores de a para los que T_a es inyectiva.

8. Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos la aplicación lineal $G_a : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como $G_a(\mathbf{x}) = A_a \mathbf{x}$, siendo

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2a \\ 3 & 4 + a & 3a & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 + a \end{pmatrix} .$$

Determina los valores de a para los que G_a es suprayectiva.