Hoja 3: Subespacios vectoriales. Intersección y suma.

1. Para las siguientes parejas V, W, formadas por un espacio vectorial V y un subconjunto $W \subset V$, dí razonadamente si W es o no es subespacio vectorial de V.
$V = \mathbb{R}^2$, $W = \{\, \mathbf{x} \;:\; x_2 = 2x_1 \,\}$.
$V = \mathbb{R}^2$, $W = \{\, \mathbf{x} \;:\; x_2 = x_1^2 \,\}$.
$V = \mathbb{R}^3$, $W = \{\, \mathbf{x} \;:\; x_2 = 0 \,\}$.
$V = \mathbb{R}^3$, $W = \{\, \mathbf{x} \;:\; x_1 x_2 = 0 \,\}$.
$V = \mathbb{R}^2$, $W = \{\, \mathbf{x} \;:\; x_2 > 0 \,\}$.
$V = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $W = \{A \in V \;:\; A \text{ es simétrica} \,\}$.
$V = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $W = \{A \in V \;:\; A \text{ es invertible} \,\}$.
$V = \mathrm{M}_{n\times 2}(\mathbb{R})$, $W = \left\{ A \in V \;:\; A \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{n\times 1} \right\}$.
$V = \{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $W = \{f \;:\; f \text{ es creciente} \,\}$.
$V = \{\text{funciones } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, $W = \{f \;:\; f''(x) \text{ existe y } f''(x) \equiv x f(x) \,\}$.
$V = \mathbb{R}[x]$, $W = \{\, p(x) \;:\; p(x) \text{ es divisible por } x - 2 \,\}$.
$V = \mathbb{R}[x]$, $W = \{\, p(x) \;:\; p(0) = 2 \,\}$.

2. (a). Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $W \subseteq V$ un subconjunto *no vacío* de V. Demuestra que las tres condiciones siguientes son equivalentes:

1. W es un subespacio vectorial de V.
2. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y cualesquiera $u, v \in W$, se tiene que $\alpha u + \beta v \in W$.
3. Para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ y cualesquiera $v_1 \ldots, v_s \in W$, se tiene que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_s v_s \in W$.

(b). Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $\{W_i\}_{i\in I}$ es una colección de subespacios vectoriales de V, demuestra que $W = \bigcap_{i\in I} W_i$ es de nuevo un subespacio vectorial de V (no olvides demostrar que $W \neq \varnothing$).

3. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1, 2, -5, 3)$ y $(2, -1, 4, 7)$. Se pide

(a) Determina si el vector $(0, 0, -37, -3)$ pertenece a W o no.

(b) Determina para qué valores de α y β el vector $(\alpha, \beta, -37, -3)$ pertenece a W.

4. Queremos decidir, razonadamente, si los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ son iguales o no:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ y } \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ \lambda \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Hazlo primero para $\lambda = 2$ y luego para $\lambda = -2$.

5. Demuestra que si V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ entonces se da *una* de las siguientes posibilidades:

(a) $V = \{\mathbf{0}\}$,

(b) V es una recta que pasa por el origen,

(c) V es un plano que pasa por el origen,

(d) $V = \mathbb{R}^3$.

6. Fijamos un entero positivo n y un cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ el conjunto de las matrices **simétricas** (las que cumplen $A^t = A$) y $\mathbb{M}_2 \subset \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ el de las **antisimétricas** (las que cumplen $A^t + A = 0$).

a) Demuestra que $\mathbb{M}_1$ y $\mathbb{M}_2$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{M}$.

b) Para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, demuestra que $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) = \mathbb{M}_1 \oplus \mathbb{M}_2$. (Puede ayudar hacerlo primero para $n = 2$ y luego para $n = 3$).

c) Para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, halla $d_1 = \dim \mathbb{M}_1$, $d_2 = \dim \mathbb{M}_2$, y comprueba que $d_1 + d_2 = \dim \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

d) Para $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, el cuerpo de dos elementos, comprueba que ahora la suma $\mathbb{M}_1 + \mathbb{M}_2$ no es directa ni es igual a $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{F}_2)$. ¿Cuáles son las causas?

7. Consideramos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ de los polinomios reales de grado a lo más 3.

(a) ¿Cuál es la dimensión de V?

(b) Halla un complementario, generado por monomios x^k, del siguiente subespacio vectorial de V:

$$W \;=\; \langle\, x^3 + x^2 + x - 1 \;,\; -x^3 + x^2 \;,\; 2x^3 + 2x^2 - 2 \;,\; 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \,\rangle\,.$$

8. Sea λ un núnero real. Considera la siguiente suma de subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -\lambda \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \right\rangle .$$

¿Para qué valores de λ es una suma directa? ¿Para cuáles no lo es?

9. Consideremos en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales $W_1 =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 >$ y $W_2 =< \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5 >$, con

$$\mathbf{v}_1 = (1,-2,-1,3),\ \mathbf{v}_2 = (0,2,1,-1),\ \mathbf{v}_3 = (-2,6,3,-7),\ \mathbf{v}_4 = (1,-2,-2,0),\ \mathbf{v}_5 = (2,0,-1,1)\,.$$

a) Halla una base de cada uno de los siguientes espacios: W_1 , W_2 , $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.

b) Comprueba que se verifica la fórmula de Grassmann.

c) Mismas cuestiones cambiando $\mathbf{v}_5$ por $(2,0,-1,0)$.

10. Para cada $a \in \mathbb{R}$ consideramos los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$V(a) \;=\; \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a \\ 2 \\ 4-a \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle \quad , \quad W(a) \;=\; \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle .$$

Halla, en función del parámetro a, la dimensión de $V(a) + W(a)$, una base de $V(a) \cap W(a)$ y un complementario de $V(a) \cap W(a)$ en $\mathbb{R}^4$.