

Hoja 12: Formas canónicas

1. Para cada uno de los endomorfismos siguientes halla la forma canónica de Jordan y una base de Jordan.

$$f_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad f_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

$$f_3 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad f_4 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

$$f_5 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f_5(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad f_6 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f_6(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

2. Para cada uno de los endomorfismos siguientes halla una forma canónica de Jordan real  $J$  y una base en la que el endomorfismo tenga como matriz  $J$ .

$$g_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, g_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad g_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, g_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

3. Llamamos **proyector** a cualquier endomorfismo  $f : E \rightarrow E$  tal que  $f \circ f = f$ .

- (a) Para un tal  $f$ , demuestra que  $\text{Im } f \subseteq \ker(f - \text{id}_E)$  y que  $\text{Im}(f - \text{id}_E) \subseteq \ker f$ .
- (b) Demuestra que los autovalores de  $f$  son 1 y 0 (se admite que  $\dim E$  pueda ser infinita).
- (c) Partiendo de  $\text{id}_E \equiv f - (f - \text{id}_E)$ , demuestra que  $E = \ker(f - \text{id}_E) \oplus \ker f$ , y que  $f$  es la proyección de  $E$  sobre el subespacio  $\ker(f - \text{id}_E)$  con dirección el subespacio  $\ker f$ . Deduce que las inclusiones del apartado (a) son igualdades.

4. Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo y  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$  escalares cualesquiera.

(a) Calcula el polinomio característico de  $A$ , siendo  $A$  una de las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a \\ 1 & -b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{bmatrix}.$$

(Sugerencia: empieza desarrollando  $\det(A - \lambda I_n)$  por la primera fila).

- (b) Da una fórmula general que a cada  $n$  y cada polinomio  $\varphi(\lambda) \equiv a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + (-\lambda)^n$  les asocia una matriz que tiene a  $\varphi(\lambda)$  por polinomio característico. Se llama **matriz compañera del polinomio**  $\varphi(\lambda)$  a esa matriz (o a su traspuesta).
- (c) Calcula el polinomio  $(2 - \lambda)^3$  y halla la forma de Jordan de su matriz compañera.

5. Definimos la exponencial de una matriz real, suponiendo que las series involucradas convergen, como  $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ .

- (a) Comprueba que  $\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$ .
- (b) Calcula  $\exp\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right)$  y  $\exp\left(\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}\right)$ .
- (c) Encuentra cambios de base que permitan escribir las aplicaciones lineales dadas por las matrices  $A = \begin{pmatrix} 11 & -18 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  en una de las formas indicadas en (2); utiliza esto para calcular  $\exp(A)$  y  $\exp(B)$ .