Grado de Matemáticas

Hoja 11: Formas canónicas

1. Consideramos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Calcula los autovalores de f.

(b) Considera el endomorfismo $\mathbb{C}$-lineal $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dado por $g(\mathbf{z}) = A\mathbf{z}$. Comprueba que $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3}\mathbf{i} \\ 2 \end{pmatrix}$ es un autovector de g ¿con qué autovalor?

(c) Haz un dibujo de la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ de $\mathbb{R}^2$, definida de la manera siguiente (atención al signo):

$$\mathbf{v} = \operatorname{Re}\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = -\operatorname{Im}\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Comprueba que la matriz de f en $\mathcal{B}$ es $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi/3 & -sen\,\pi/3 \\ sen\,\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix}$, con $\pi/3\,\mathrm{rad} = 60^{\mathrm{o}}$.

(d) Deduce del apartado anterior que $f^3 \equiv -\mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}$ y que $f^6 \equiv \mathrm{I}_{\mathbb{R}^2}$.

(e) Llamemos x_1, x_2 a las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$. Llamemos x, y a las coordenadas en la base estándar $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Consideramos la base $\mathcal{B}' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$, formada por dos vectores perpendiculares de longitud unidad. Denotamos por y_1, y_2 las funciones coordenadas respecto de $\mathcal{B}'$. Demuestra las identidades:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y/2 \\ (2x-y)/2\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} (x+y)/\sqrt{2} \\ (x-y)/\sqrt{2} \end{pmatrix} ,$$

$$3\,(x_1^2 + x_2^2) \equiv x^2 - xy + y^2 \equiv \frac{1}{2}\,y_1^2 + \frac{3}{2}\,y_2^2 .$$

Deduce que para cada $r_0 > 0$ la curva de ecuación $x_1^2 + x_2^2 = r_0^2$ se define también por la ecuación

$$\frac{y_1^2}{6r_0^2} + \frac{y_2^2}{2r_0^2} = 1 ,$$

luego dicha curva es la **elipse** centrada en el origen, de semieje mayor $\sqrt{6}r_0$, con dirección la recta $L_1 = \langle \mathbf{u}_1 \rangle = \{y = x\}$, y de semieje menor $\sqrt{2}r_0$ con dirección la recta $L_2 = \langle \mathbf{u}_2 \rangle = \{y = -x\}$ perpendicular a L_1. En particular (semieje mayor)$= \sqrt{3}\cdot$(semieje menor) para todas estas elipses. Dibújalas. Concluye que si $\mathbf{v}$ es un vector en la elipse, $f(v)$ también está en la elipse.

2. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo dado por $F(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$, siendo $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula los autovalores de F (en $\det(M - \lambda\, I_3)$ resta la segunda fila de la primera).

(b) Halla un autovector complejo para la matriz M que sea de la forma $\begin{pmatrix} 5 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(c) Halla una base de $\mathbb{R}^3$ en la cual la matriz de F tenga la forma $\begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, con $b > 0$.

3. Para cada uno de los endomorfismos siguientes halla la forma canónica de Jordan y una base de Jordan.
$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{x}$.
$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$. (En el determinante de $f_2 - \lambda\,\mathrm{I}$ resta la segunda fila de la primera).
$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{x}$. (En $\det(f_3 - \lambda\,\mathrm{I})$ resta la tercera columna de la primera).
$f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x}$. (En $\det(f_5 - \lambda\,\mathrm{I})$ suma la segunda columna a la primera).

4. Consideramos el espacio bidimensional $E = P^{(1)}_{\mathbb{R}}[x]$ y el endomorfismo $L : E \to E$ cuyo efecto sobre el polinomio general $p(x) \in E$ es el siguiente:

$$L(p) \;=\; -2\,p(0) + (3+x)\,p - (1+x^2)\,p' \,.$$

(a) Halla la forma canónica de Jordan J de L y una base de Jordan (formada por polinomios).

(b) Calcula el iterado $L^{13}(4-7x)$ (sugerencia: halla una fórmula para J^k).

5. Sea A una matriz real $n \times n$ con n impar. Demuestra que A tiene al menos un autovalor real.

6. Sea A una matriz real $n \times n$ con n par. Demuestra que si $\det A < 0$ entonces A tiene al menos un autovalor real positivo y al menos un autovalor real negativo.
¿Están obligados a ser reales los autovalores de una matriz real 2×2 con determinante positivo?

7. Si A una matriz $n \times n$, con entradas en cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, se define traza(A) como la suma de sus entradas diagonales.

(a) Prueba que si A y B son matrices cuadradas traza(AB) = traza(BA).

(b) Sea A una matriz $n \times n$, con entradas en cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ la lista completa de los autovalores de A (con las repeticiones correspondientes, si alguno es múltiple, e incluyendo los que estén fuera de $\mathbb{K}$). Demuestra las fórmulas: $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \operatorname{traza} A$ y $\lambda_1 \cdots \lambda_n \;=\; \det A$.

¿Son válidas esas fórmulas si sólo tomamos los autovalores que estén en $\mathbb{K}$?

8. Sea $A \in M_{3\times3}(\mathbb{K})$. Prueba la fómula siguiente para el polinomomio característico de la matriz A:

$$|A - xI| = -x^3 + \operatorname{traza}(A)\,x^2 - \frac{1}{2}\left[(\operatorname{traza}(A))^2 - \operatorname{traza}(A^2)\right]x + |A| \,.$$

9. Sea $A = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{bmatrix}$ una matriz 3×3 y sea $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ la lista completa de sus autovalores. Demuestra la fórmula:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \;=\; \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} \,,$$