Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática

Hoja 0: Operaciones con matrices

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula los productos:

$$ABC \ , \ BAC \ , \ ACB \ , \ CAB \ , \ BCA \ , \ CBA \ .$$

¿Crees necesario tener cuidado con el orden de los factores en un producto de matrices?

2. Consideramos una fila y una columna:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \ ,$$

(a) Comprueba que se pueden efectuar los dos productos $\mathbf{fv}$ y $\mathbf{vf}$, hállalos y comenta el resultado.

(b) ¿Tienen igual traza los dos productos?

(c) Repite el experimento con $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y la misma $\mathbf{v}$.

3. Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -8 & 2 \\ 3 & -7 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} -14 & 7 & -2 \\ -6 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

a) Cada entrada de AB es una suma de tres productos (número de A)·(número de B). Efectúa AB dejando esas nueve sumas indicadas, sin sumarlas. Haz lo mismo con BA, dejando también las nueve sumas indicadas. ¿Son iguales sumandos correspondientes en AB y en BA? ¿Son iguales las sumas?

b) A la vista del resultado ¿te parece *obvio* que si $AB = I_3$ entonces tenga que ser $BA = I_3$?

4. Sean A y B matrices $n \times n$, con la A invertible.

a) Demuestra que la ecuación matricial $AX = B$ tiene una única solución, $X = A^{-1}B$.

b) Demuestra que la ecuación matricial $YA = B$ tiene una única solución, $Y = BA^{-1}$.

c) Calcula X e Y cuando $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. ¿Son iguales X e Y?

Recordamos aquí cinco maneras distintas de entender el producto de matrices. Si A es una matriz $n \times p$ y B es una matriz $p \times q$, descritas de la manera siguiente:

$$A = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}_1 \\ \hline \mathbf{f}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{f}_n \end{array} \right] \quad , \quad B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_q \end{array} \right] \quad ,$$

donde las filas $\mathbf{f}_i$ son $1 \times p$ y las columnas $\mathbf{v}_j$ son $p \times 1$, entonces es:

$$AB = (u_{ij})_{n \times q} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{v}'_1 & \mathbf{v}'_2 & \dots & \mathbf{v}'_q \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f}'_1 \\ \hline \mathbf{f}'_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{f}'_n \end{array} \right] \quad ,$$

con los siguientes valores:

$$\begin{array}{rcl} u_{ij} & \overset{(1^{\underline{a}})}{=} & \mathbf{f}_i \mathbf{v}_j \\ \mathbf{v}'_j & \overset{(2^{\underline{a}})}{=} & A\mathbf{v}_j \overset{(4^{\underline{a}})}{=} \text{combinación lineal de las columnas de } A \text{ con coeficientes los de } \mathbf{v}_j \\ \mathbf{f}'_i & \overset{(3^{\underline{a}})}{=} & \mathbf{f}_i B \overset{(5^{\underline{a}})}{=} \text{combinación lineal de las filas de } B \text{ con coeficientes los de } \mathbf{f}_i \end{array}$$

5. Haz el siguiente producto de las cinco maneras, indicando detalladamente cada paso:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} .$$

6. Denotamos por el aspa $\times$ la operación de *producto vectorial* en $\mathbb{R}^3$ y por $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   a) Efectúa $\mathbf{i} \times \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ de las dos maneras posibles. ¿Es asociativo el producto vectorial?

   b) Considera los vectores particulares siguientes:

   $$\mathbf{a} = \mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{b} = \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{d} = \mathbf{i} + \mathbf{k} \, .$$

   y evalúa los cinco productos vectoriales siguientes:

   $$\begin{array}{l} ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}) \times \mathbf{d} \\ (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) \times \mathbf{d} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \\ \mathbf{a} \times ((\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{d}) \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) \end{array}$$

   ¿Hay dos iguales?

Para practicar más con matrices:

1. Se dice que dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ *conmutan* si $AB = BA$. Encuentra todas las matrices que conmutan respectivamente con:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sean A y B dos matrices con coeficientes en el mismo cuerpo. Decide de manera razonada si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas:

$$(AB)^2 = A^2B^2, \qquad (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \qquad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

¿Qué ocurre con las anteriores igualdades si A y B conmutan?

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^n y B^n para $n \in \mathbb{N}$. ¿Puedes encontrar A^n y B^n para $n \in \mathbb{Z}$?

4. Encuentra, si existen, dos matrices con coeficientes racionales A y B, de tamaño adecuado, que resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3A - 2B & = & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\ 2A + B & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ para los que se cumple la igualdad $A^2 + \alpha A + \beta I_2 = 0$, donde 0 es la matriz nula de orden dos.

6. Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B, C \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$. Demuestra que

$$A(B + C) = AB + AC.$$

7. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La suma de matrices simétricas es una matriz simétrica.

b) El producto de matrices simétricas es una matriz simétrica.

8. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ se llama *idempotente* si $A^2 = A$. Decide de manera razonada si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si A es idempotente, entonces $I_n - A$ es idempotente.

b) Si A es idempotente, entonces $(I_n - A)A = A(I_n - A) = 0$.

c) Si A es idempotente e invertible entonces A es la matriz identidad.