El maldito problema 2.6.b

El problema 6.b de la hoja 2 de la asignatura Álgebra Lineal del curso 2024/2025 pedía *probar la independencia lineal del conjunto* $\{\cos(nx)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\operatorname{sen}(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ *en el espacio vectorial de funciones continuas* $[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Este es un problema clásico que cualquier matemático profesional resolvería con la primera o la segunda solución de más abajo. Sin embargo, a mi juicio, está fuera del alcance de un estudiante de primero si no se incluyen indicaciones. Curiosamente, parece que lleva varios años en versiones de la hoja.

El propósito de este documento es dar varias soluciones del problema. Las dos primeras son bien conocidas. Posiblemente las que tengan números más altos resulten más asequibles. En este sentido, la última me parece la más cercana a lo que un estudiante excepcional podría idear en primero. Si alguien tiene noticia de alguna solución más simple, agradezco que me la comunique.

Antes de pasar a las soluciones, dos comentarios sencillos: El primero es que el conjunto es infinito y probar su independencia lineal es equivalente a probar la de

$$\mathcal{C}_N = \{\cos(nx)\}_{n=1}^{N} \cup \{\operatorname{sen}(nx)\}_{n=1}^{N}$$

para todo $N \in \mathbb{Z}^+$. El segundo comentario es que da igual demostrar la independencia lineal sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$, que las funciones tomen valores reales es irrelevante porque la dependencia lineal sobre $\mathbb{R}$ la implica sobre $\mathbb{C}$ y se puede ir en sentido contrario tomando partes reales o imaginarias.

En todas las soluciones excepto en la tercera se intenta buscar alguna propiedad que permita separar un elemento de $\mathcal{C}_N$.

1. La prueba habitual.

Idea: Si multiplicamos dos elementos de $\mathcal{C}_N$, tendrán tanta parte positiva como negativa excepto en el caso tonto en que los dos elementos sean en realidad el mismo y por tanto se obtenga una función positiva.

Si tenemos una combinación lineal nula

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} \mu_n \operatorname{sen}(nx) = 0,$$

multiplicando por $\cos(kx)$ esta igualdad e integrando en $[0, 2\pi]$ se obtiene $\lambda_k \int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\,dx = 0$ porque $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\operatorname{sen}(nx)\,dx = 0$ y $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,dx = 0$ para $n \neq k$. Esto se sigue de las simetrías de las funciones trigonométricas o de las fórmulas de adición $2\cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)$ y $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

Obviamente, $\lambda_k \int_0^{2\pi} \cos^2(kx)\,dx$ implica $\lambda_k = 0$ porque la integral es positiva. Un razonamiento similar multiplicando por $\operatorname{sen}(kx)$, lleva a $\mu_k = 0$.

2. Complejos a cambio de elegancia.

Idea: La fórmula de Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$ permite unificar los senos y los cosenos en una sola función. Cuando esta unificación se combina con la prueba anterior, los cálculos se vuelven tremendamente simples y simétricos.

Los conjuntos $\{\cos(nx), \operatorname{sen}(nx)\}$ y $\{e^{inx}, e^{-inx}\}$ generan el mismo subespacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ gracias a las fórmulas de Euler

$$e^{\pm inx} = \cos(nx) \pm i \operatorname{sen}(nx), \quad \cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \operatorname{sen}(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Por tanto, la independencia lineal de $\mathcal{C}_N$ equivale a la de $\{e^{inx}\}_{n=1}^N \cup \{e^{-inx}\}_{n=1}^N$. Añadiendo la función 1, correspondiente a $n=0$, para tener más simetría, y multiplicando por e^{iNx} para eliminar los exponentes negativos, tenemos que la independencia lineal de $\mathcal{C}_N$ se deduce de la de

$$\mathcal{D}_{2N} = \left\{e^{inx}\right\}_{n=0}^{2N}.$$

Partiendo de una combinación lineal nula

$$(**) \qquad \sum_{n=0}^{2N} \lambda_n e^{inx} = 0,$$

multiplicando por e^{-ikx} e integrando en $[0, 2\pi]$ se obtiene $\lambda_k = 0$. Los cálculos son muy sencillos, ya que para $n \neq k$ una primitiva de $e^{i(n-k)x}$ es proporcional a ella misma y al sustituir los límites 0 y 2π resulta cero por la 2π-periodicidad. Para $n = k$ la integral es $\int_0^{2\pi} 1\, dx = 2\pi$.

3. Vandermonde.

Idea: Proceder como en otros problemas de independencia lineal de funciones dando valores y resolviendo el sistema en los coeficientes de la combinación lineal. La dificultad es que vamos a usar el paso a $\mathcal{D}_{2N}$ del que parte la solución anterior.

Si en la combinación lineal nula (**) damos valores $x = 2\pi k/(2N+1)$ con $0 \le k \le 2N$ se obtiene el sistema lineal

$$A\vec{\lambda} = \vec{0} \qquad \text{con} \quad A = (a_{kn}) = \left(e^{2\pi ikn/(2N+1)}\right)_{k,n=0}^{2N}.$$

Una matriz de la forma $(x_n^k)_{n,k=0}^M$ se dice que es una *matriz de Vandermonde* y si los x_n son distintos se sabe que su rango es $M+1$. En nuestro caso, se cumple esta hipótesis con $x_n = e^{2\pi in/(2N+1)}$ y $M = 2N$. Así pues, el sistema es compatible determinado y solo tiene la solución trivial $\vec{\lambda} = \vec{0}$.

En caso de que no hayas oído hablar nunca de las matrices de Vandermonde, la prueba de que el rango es $M+1$ es una aplicación de reducción de Gauss, solo que un poco peculiar, pues se empieza creando los ceros por la parte de abajo. Por ejemplo, en un primer paso, se haría $f_{2N} \mapsto f_{2N} - f_{2N-1}$, $f_{2N-1} \mapsto f_{2N-1} - f_{2N-2}$, etc. Con ello se consiguen los ceros bajo el primer pivote. El truco para el segundo paso es que renombrando las variables $\widetilde{\lambda}_1 = \lambda_1(x_1 - 1)$, $\widetilde{\lambda}_2 = \lambda_2(x_2 - 1)$, etc. la submatriz a la que hay que aplicar ahora reducción de Gauss vuelve a ser la del principio. De esta forma, todos los pivotes son unos en la diagonal y el rango es máximo.

4. Un promedio discreto.

Idea: Esta es una variante discreta de las soluciones clásicas. En lugar de promediar utilizando integrales, se pueden emplear un número finito de valores, lo cual es más elemental. No obstante, es difícil que uno piense en algo similar sin conocer las pruebas anteriores.

Consideremos $x_k = \frac{\pi k}{N}$, $0 \le k < 2N$. Claramente, $e^{2Nix_k} = 1$. Por otro lado, para $0 \le n < 2N$ se tiene $\sum_{k=0}^{2N-1} e^{inx_k} = 0$ bien usando la fórmula para la suma de una progresión geométrica (porque $e^{inx_k} = (e^{inx_1})^k$) o bien pensando en que $2N$ fuerzas unitarias apuntando a los vértices de un polígono regular tienen resultante cero. Entonces, al promediar (**) en x_k se obtiene $\lambda_{2N} = 0$. Repitiendo el proceso con $\mathcal{D}_{2N-1}$ se llega a $\lambda_{2N-1} = 0$ y así sucesivamente.

5. El oscilador armónico.

Idea: Alguien con gusto por la física puede tener en mente que $\operatorname{sen}(\omega x)$ y $\cos(\omega x)$ son las soluciones de la ecuación $f'' + \omega f = 0$ del movimiento armónico simple con frecuencia angular ω. Esta ecuación viene del $F = ma$ de toda la vida. Así se pueden separar unas frecuencias de otras.

En el caso improbable de que el potencial estudiante con gusto por la física tenga en mente que los elementos de $\mathcal{D}_{2N}$ también son soluciones de la ecuación, podrá obtener una prueba breve definiendo $f(x)$ como el primer miembro de (**) y obteniendo al calcular $f'' + 4N^2 f$ la ecuación

$$\sum_{n=0}^{2N-1} \lambda_n (4N^2 - n^2) e^{inx} = 0.$$

Si no todos los λ_n son nulos, esto daría que $\mathcal{D}_{2N-1}$ es linealmente dependiente. Repitiendo el proceso se llegaría a que $\mathcal{D}_0 = \{1\}$ es linealmente dependiente, lo cual es absurdo.

En el caso más realista de que uno no haya sabido pasar a $\mathcal{D}_{2N}$, también se puede proceder con $\mathcal{C}_N$ partiendo de (*). Ahora bien, para deducir que la dependencia lineal de $\mathcal{C}_N$ implica la de $\mathcal{C}_{N-1}$, hay que comprobar que $\lambda_N \cos(Nx) + \mu_N \operatorname{sen}(Nx) = 0$ solo puede ocurrir con λ_N y μ_N simultáneamente nulos (¿ves por qué se necesita esto?). Para ello, basta tomar, por ejemplo, $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2N}$.

6. Periodicidad.

Idea: Las funciones $\cos(Nx)$ y $\operatorname{sen}(Nx)$ son $\frac{2\pi}{N}$-periódicas y el resto de las del conjunto $\mathcal{C}_N$ no lo son. Esto permite separarlas y así iniciar un proceso inductivo.

Llamando $f(x)$ al primer miembro de (*), se tiene $f\big(x + \frac{2\pi}{N}\big) - f(x) = 0$. Utilizando las fórmulas de adición

$$\cos\Big(nx + \frac{2\pi n}{N}\Big) = \cos(nx)c_n - \operatorname{sen}(nx)s_n, \qquad \operatorname{sen}\Big(nx + \frac{2\pi n}{N}\Big) = \operatorname{sen}(nx)c_n + \cos(nx)s_n$$

donde $c_n = \cos(2\pi n/N)$, $s_n = \operatorname{sen}(2\pi n/N)$, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{N-1} \big(\lambda_n(c_n - 1) + \mu_n s_n\big)\cos(nx) + \sum_{n=1}^{N-1} \big(\mu_n(c_n - 1) - \lambda_n s_n\big)\operatorname{sen}(nx) = 0.$$

Cualquiera que sea $1 \le n \le N-1$, el sistema $\lambda_n(c_n - 1) + \mu_n s_n = 0$, $\mu_n(c_n - 1) - \lambda_n s_n = 0$, solo tiene la solución trivial $\lambda_n = \mu_n = 0$ (por ejemplo usando que el determinante es $(c_n - 1)^2 + s_n^2 > 0$ o por reducción de Gauss). Así pues, excluyendo el caso $\lambda_N \cos(Nx) + \mu_N \operatorname{sen}(Nx) = 0$ con $(\lambda_N, \mu_N) \ne (0,0)$ como en la solución anterior, se tiene que la dependencia lineal de $\mathcal{C}_N$ implica la de $\mathcal{C}_{N-1}$. Repitiendo el argumento se llega a que esta dependencia lineal llevaría a la de $\{\cos x, \operatorname{sen} x\}$ que no se da porque corresponde a $N = 1$ del caso excluido.

Autor: Fernando Chamizo
Versión: 2024/09/30
https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/