Números *rarunos*

Sospechando de los complejos. Los números complejos son muy útiles en ingeniería y en física, sin embargo, a todos nos parecieron sospechosos cuando nos hablaron de ellos por primera vez y protestábamos en nuestros adentros diciendo que la raíz cuadrada de -1 no existe.

Cantor dijo que "la esencia de las matemáticas es su libertad". Llevando esto al extremo, tenemos permiso de la autoridad para inventarnos lo que queramos con la única guía de la belleza (que es también la esencia de las matemáticas, según otros). Eso sí, debemos escapar de las contradicciones internas como de la peste. Por ejemplo, si alguien inventa un nuevo número N que añadido a los habituales sirva para resolver la ecuación $1+N=2+N$ entonces, a no ser que niegue la propiedad de cancelación (existencia de elemento opuesto) está abocado a enfrentarse a $1=2$ que atenta contra la definición axiomática de 1 y 2.

¿No podría ocurrir algo similar con los números complejos? Sería un desastre que después de tantos años conviviendo con ellos alguien descubriera que conducen a $1=2$. Una forma de quedarse más tranquilo es definir los números complejos sin números complejos. Una manera artificiosa, pero sencilla, es considerar la matriz

$$\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{que cumple} \qquad \mathbf{j}^2 = -I_2$$

donde I_2 es la matriz identidad 2×2. Ahora asignamos a cada número complejo con partes real e imaginaria a y b su análogo matricial

$$a + bi \longmapsto aI_2 + b\mathbf{j} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Es un ejercicio comprobar que esta aplicación f respeta las operaciones: $f(z_1+z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ y $f(z_1 z_2) = f(z_1)f(z_2)$, así como los inversos. Establece una biyección entre $\mathbb{C}$ y el subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dado por las matrices A con $a_{11} = a_{22}$ y $a_{12} = -a_{21}$. En cursos superiores dirás que establece un isomorfismo: ambas estructuras algebraicas son idénticas salvo cambiar los nombres. La ventaja teórica, o al menos psicológica, es que nos es más fácil creer en las matrices 2×2 reales que en los números complejos, a fin de cuentas dichas matrices son tablas de números de toda la vida, libres de sospecha.

Los cuaterniones. Los números complejos surgieron originalmente para que $x^2 + 1 = 0$ tuviera solución, concretamente las soluciones i y $-i$. Ejerciendo la libertad de la que nos habla Cantor, vamos a ver hasta dónde llegamos inventándonos que tiene más soluciones.

Teniendo en mente la interpretación matricial anterior, llamemos $\mathbf{j}$ a i. Digamos que existe otra solución $\mathbf{k} \neq \mathbf{j}$, entonces

$$(\mathbf{j}-\mathbf{k})(\mathbf{j}+\mathbf{k}) = \mathbf{j}^2 + \mathbf{jk} - \mathbf{kj} - \mathbf{k}^2 = \mathbf{jk} - \mathbf{kj}.$$

Si no sacrificamos la propiedad conmutativa, entonces nos encontramos con que el producto de dos factores diferentes de cero es nulo, lo cual es más desastroso porque impide cualquier tipo de división. Ya tenemos cuatro soluciones de $x^2+1=0$ que son $\pm\mathbf{j}$ y $\pm\mathbf{k}$, Ruffini se revuelve en su tumba, junto con la desigualdad blasfema $\mathbf{jk} \neq \mathbf{kj}$. De hecho, con matrices se pueden encontrar infinitas soluciones de $x^2+1=0$ identificada con $x^2+I_2=O_2$.

Los números complejos son útiles, entre otras cosas, para representar rotaciones alrededor del origen en $\mathbb{R}^2$ porque al multiplicarlos se suman los ángulos. Hamilton estaba buscando en el siglo XIX una generalización a las rotaciones de $\mathbb{R}^3$, lo cual es mucho más difícil porque no conmutan y porque al aplicar dos de ellas no se suman los ángulos. Después de varios intentos, llegó a que tenía que inventar otro par de raíces $\pm\mathbf{i}$ y llevó a cabo el acto de vandalismo matemático más famoso grabando con su navaja en un puente de Dublín las relaciones que debía haber entre estas seis raíces:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.$$

De aquí se deduce toda la tabla de multiplicar y dividir de $\{\pm 1, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ que resulta ser cerrada. Por ejemplo, $\mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk}$ implica $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$. Por otro lado, invirtiendo $\mathbf{ijk} = -1$ se sigue $\mathbf{k}^{-1}\mathbf{j}^{-1}\mathbf{i}^{-1} = -1$ y como $\mathbf{i}^{-1} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{j}^{-1} = -\mathbf{j}$ (porque $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = -1$), se deduce $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$.

Hamilton introdujo los *cuaterniones*

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \qquad \text{con} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

que generalizaban los complejos, correspondientes a $c = d = 0$. Pensó que su invención revolucionaría la física y las matemáticas. Sin embargo, tuvo mediano éxito en vida y, a la larga, el álgebra lineal que opera en cualquier número de dimensiones ha triunfado sobre su enfoque, aunque ha quedado un rastro con la notación $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ para el producto vectorial.

Es natural preguntarse si los cuaterniones tienen una interpretación matricial que nos deje tranquilos frente a posibles contradicciones. Aquí hay una ironía de la historia. El gran físico Pauli introdujo sus famosas matrices en un importantísimo artículo que inició la teoría cuántica del espín del electrón. En una nota a pie de página escribe que le han dicho que son lo mismo que los cuaterniones, por tanto, uno tiende a pensar que si Pauli los hubiera conocido, los textos de mecánica cuántica estarían llenos de ellos. Una equivalencia matricial es

$$\mathbf{i} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{j} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} \mapsto \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Si a alguien le escandaliza el uso de matrices complejas, se puede pasar a matrices 4×4 sustituyendo cada número por un bloque 2×2 dado por la aplicación f antes introducida.

Todos los números raros. Hoy en día la teoría de las estructuras algebraicas está muy desarrollada y nos quedamos tan anchos diciendo que *un álgebra asociativa, unitaria y de dimensión finita sobre un cuerpo K se puede realizar como un subálgebra de $\mathcal{M}_n(K)$*. Esto significa que todos los números raros medianamente decentes que nos inventemos los podemos entender en realidad como matrices. Más que explicar toda esta jerga, veamos la idea simple, para cualquiera que sepa álgebra lineal, que subyace.

Si nos hemos inventado n números nuevos independientes $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ que añadimos a los de un cuerpo K (por ejemplo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) de forma que todos los números raros son $\mathcal{R} = \{\sum \lambda_j \mathbf{e}_j : \lambda_j \in K\}$, entonces $\mathbf{x} = \sum \lambda_j \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{e}_k \mathbf{x} = \sum \lambda_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_j$ induce una aplicación lineal sobre las coordenadas λ_j de $\mathbf{x}$, que tiene una matriz $n \times n$. Usando la asociativa y la distributiva conseguiremos asignar a cada elemento de $\mathcal{R}$ una aplicación lineal de forma que la multiplicación corresponda a la composición, esto es, el producto de números sea como el producto de matrices.

Sugerencias bibliográficas. Si quieres saber más sobre números *rarunos*, dos buenas referencias son:

C. del Buey de Andrés, Todo es más sencillo con los hipercomplejos. Gac. R. Soc. Mat. Esp. 22, No. 1, 145–157 (2019).

I. L. Kantor and *A. S. Solodovnikov*, Hypercomplex numbers. An elementary introduction to algebras. Transl. by A. Shenitzer. New York etc.: Springer-Verlag (1989).

Autor: Fernando Chamizo
Versión: 2024/10/02
https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/