Me dices dual y me dejas igual

1. El antisistema (de referencia) matemático

En los cursos de primero de muchos grados universitarios de ciencias y prácticamente en todos los de matemáticas se estudian espacios vectoriales de dimensión finita. Una vez que se especifica una base cada vector tiene unas coordenadas únicas bien definidas que heredan las operaciones suma y producto por escalares del espacio vectorial. Entonces no perdemos nada si nos olvidamos de espacios vectoriales raros y trabajamos siempre con coordenadas que son numeritos, en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ en la gran mayoría de estos cursos. Escrito en piedra de teorema:

Teorema. *Sea V un espacio vectorial sobre K. Si $\dim V = n$ entonces V es isomorfo a K^n. En particular, todos los espacios vectoriales sobre K de la misma dimensión son isomorfos.*

De este modo, hay motivos para llevar a cabo una rebelión antisistema reclamando que hemos sido engañados: nos hablaban de espacios vectoriales obligándonos a estudiarlos en general cuando en realidad solo había uno.

Si uno lo piensa, lo que es antisistema, pero antisistema de referencia, es el planteamiento habitual. Para realizar el isomorfismo debemos escoger una base, un sistema de referencia, y si no lo vamos arrastrando todo el rato, perdemos las relaciones entre los espacios.

Por ejemplo, sabemos que $V = \mathbb{R}^3$ es suma directa de $W_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $W_2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$ (geométricamente, un plano y una recta oblicua a él) y no lo es si W_2 se reemplaza por $W_2' = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = x_3 = 0\}$ (la recta estaría contenida en el plano). Sin embargo, $W_1 \cong \mathbb{R}^2$, $W_2 \cong W_2' \cong \mathbb{R}$. En términos más elementales, preguntas como si $\mathbb{R}$ está incluido en $\mathbb{R}^2$ resultan ambiguas tras un isomorfismo, es cierto si $\mathbb{R}$ proviene de $\{(x, 0)\}$ y $\mathbb{R}^2$ proviene de $\{(x, y)\}$, pero es falso en caso de que provengan de $\{(0, 0, z)\}$ y de $\{(x, y, 0)\}$.

Por otro lado, no debemos condenar al olvido la idea de que los espacios de dimensión finita sean todos como K^n. Esta idea es responsable de que podamos representar aplicaciones lineales raras entre espacios vectoriales raros con una simple matriz. Si pasamos a numeritos todo el espacio ambiente y hacemos lo mismo con sus subespacios de manera coherente, un problema muy abstracto (en espacios de matrices, polinomios, funciones,...) se convertirá en a un problema de toda la vida en K^n. No hay razón para descartar la libertad de elegir bases.

Una cita de un famoso algebrista (I. Kaplansky) refiriéndose a él mismo y a otro matemático famoso (P. Halmos) ilustra la situación: *"Compartimos una filosofía con respecto al álgebra lineal: pensamos sin bases, escribimos sin bases, pero cuando las cosas se ponen feas cerramos la puerta del despacho y calculamos con matrices como locos"*.

2. Desmitificando el dual

La idea de considerar las funciones definidas en un conjunto más que el conjunto en sí aparece a menudo en temas avanzados de matemáticas con el propósito de tener más estructura. Por ejemplo, no podemos sumar los puntos de una esfera sin salirnos de ella, pero sí podemos sumar las funciones de la esfera a $\mathbb{R}$. Sin embargo, en un espacio vectorial V ya sabemos sumar y multiplicar por números, por tanto, el dual V^* no añade más estructura. En mi opinión (la libertad de cátedra es el permiso que tienen los profesores para decir tonterías sin que les lleven a juicio), el dual en espacios vectoriales de dimensión finita generales que se suele introducir en un primer curso del grado de matemáticas es solo una preparación para lo que se verá en cursos superiores. En sí, no es demasiado interesante. No plantea problemas nuevos naturales ni resuelve otros que no supiéramos atacar. Bajo una definición abstracta, se esconde una realidad muy sencilla.

Si $\dim V = n$, una vez fijada una base, cada elemento del dual se representa con una matriz $1 \times n$, de este modo, *un elemento del dual, esencialmente, no es más que un vector (de K^n) tumbado*. Como V y V^* tienen la misma dimensión, del teorema se deduce $V \cong V^*$, lo cual suena bastante obvio con nuestra filosofía de los vectores tumbados. Un algebrista como el de la cita diría que es un isomorfismo *no natural* porque no está universalmente definido sin fijar una base. Así que, ¿no estaremos cayendo en la misma trampa que antes al pensar en vectores tumbados? No si identificamos el espacio ambiente con K^n y tumbamos todos los vectores, los de él y de sus subespacios.

Vamos por ejemplo con la aplicación dual. Según el teorema, una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede identificar con $f : K^n \longrightarrow K^m$ donde $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. Si φ es un vector tumbado $1 \times m$, entonces $\varphi \mapsto \varphi A$ lo aplica en un vector tumbado $1 \times n$, con ello tenemos la aplicación dual $f^* : (K^m)^* \longrightarrow (K^n)^*$. ¿Por qué nos decían que su matriz era la traspuesta? Porque cuando se opera en coordenadas, la matriz de una aplicación lineal es por lo que hay que multiplicar a la izquierda de las coordenadas puestas en columna. En la base canónica las coordenadas de φ puestas en columna son φ^t, así que levantando los vectores tumbados para obtener coordenadas resulta que la aplicación dual es $\varphi^t \mapsto (\varphi A)^t = A^t\varphi^t$ y se ve que la matriz (en la base canónica) es A^t. No hay ningún misterio en la base canónica del dual de K^m, es la base canónica que ya conocemos, pero tumbada. La igualdad

$$\varphi = (a_1, a_2, \dots, a_m) = a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + a_m(0, 0, \dots, 1)$$

indica que las $a_1, a_2, \dots, a_m$ son las coordenadas de φ en la base canónica.

Vamos con la base dual. El trabalenguas de que en K^m la base dual de la canónica es canónica del dual es una manera retorcida de decir que $\vec{e}_i^{\,t}\vec{e}_j = \delta_{ij}$ con $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y 0 en otro caso. Todas estas operaciones entre raquíticas matrices fila y columna escritas juntas se reducen a la identidad tonta $II = (\delta_{ij}) = I$, porque la fila i-ésima de la primera I es $\vec{e}_i^{\,t}$ y la columna j-ésima de la segunda I es $\vec{e}_j$. Si ahora utilizamos otra base cuyas coordenadas en la canónica son las columnas de C, para conservar la igualdad con (δ_{ij}), que viene de la definición de base dual, debemos compensarla con su inversa y escribir $C^{-1}C = I$. Entonces, la base dual son los vectores tumbados correspondientes a las fila de C^{-1}.

El hecho de que la matriz de la aplicación dual sea la traspuesta de la aplicación de partida se sigue cumpliendo siempre que usemos bases duales. ¿Qué significa esto? Un cambio de base es solo un cambio de variable. Si $f : K^n \longrightarrow K^m$ es $\vec{y} = f(\vec{x}) = A\vec{x}$ cambiamos $\vec{x} = C_1\vec{x}\,'$, $\vec{y} = C_2\vec{y}\,'$ para ciertas $C_1 \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $C_2 \in \mathcal{M}_{m\times m}$ no singulares y resulta $\vec{y}\,' = C_2^{-1}AC_1\vec{x}\,'$ que para $C_1 = C_2$ da la conocida fórmula de cambio de base de endomorfismos. Por otro lado, la aplicación dual en coordenadas viene dada por $\psi^t = A^t\varphi^t$ y, según lo dicho de que la base dual son las filas de la inversa, al hacer los cambios de variable correspondientes a las bases duales se tiene $\psi^t = (C_1^{-1})^t\widetilde{\psi}^t$ y $\varphi^t = (C_2^{-1})^t\widetilde{\varphi}^t$. Al sustituir y despejar $\widetilde{\psi}^t$,

$$\widetilde{\psi}^t = C_1^tA^t(C_2^{-1})^t\widetilde{\varphi}^t = (C_2^{-1}AC_1)^t\widetilde{\varphi}^t.$$

Por tanto, la aplicación dual tiene como matriz la traspuesta de la cambiada de base.

3. Un tira y afloja con tensores

A pesar de la desconfianza que sugiere la sección anterior, el dual en espacios vectoriales de dimensión finita sin estructura adicional tiene algún papel invitado en ciertas áreas, por ejemplo en geometría diferencial. Resulta que algunos objetos matemáticos y físicos requieren un álgebra multilineal, un álgebra lineal en varias variables. A un endomorfismo le metes un vector y te sale otro, al tensor electromagnético le metes dos vectores y te sale un número, al tensor de curvatura (que participa en la relatividad general) le metes tres vectores y te sale otro. Para poner orden en esta jungla, los vectores en la salida se pasan siempre a números con elementos del dual tomando estos como argumentos. En vez de considerar, por ejemplo, $f : V\times V \longrightarrow V$ consideramos $T(\varphi, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \varphi\big(f(\vec{v}_1, \vec{v}_2)\big)$ que va de $V^*\times V\times V$ en K. El álgebra multilineal necesaria en ciertos ámbitos motiva generalizar la idea al concepto de *tensor* (m, n), una aplicación multilineal

$$T : V^*\times \overset{m \text{ veces}}{\cdots\cdots} \times V^*\times V\times \overset{n \text{ veces}}{\cdots\cdots}\times V \longrightarrow K.$$

Así, un endomorfismo es un tensor $(1, 1)$ y un elemento del dual un tensor $(0, 1)$. Los físicos introducen una taquigrafía muy intuitiva en la que los tensores tienen matrices $m+n$ dimensionales con m índices arriba y n abajo. Para que aprecies su utilidad, aquí va un ejemplo. Quizá sepas que dado un endomorfismo con matriz $A = (a_{ij})$ su *traza* $\operatorname{tr}(A) = \sum a_{ii}$, la suma de los elementos de su diagonal, es invariante por cambios de base. Si le pides a un matemático que te lo demuestre, te contará unos rollos de conmutatividad o del llamado polinomio característico. Un físico te diría simplemente que la matriz son las componentes a^i_j de un tensor $(1, 1)$, al sumar en $i = j$, lo que él indicará con a^i_i, te quedas sin índices y un tensor $(0,0)$ es una constante (no hay variables donde evaluarlo).

Cuando uno dota a un espacio vectorial con más estructura introduciendo una manera de medir, el dual en dimensión finita tiene más gracia. Sin entrar en detalles, una longitud $\|\vec{v}\|$ para los vectores de V induce una longitud en V^*, que indicamos con la misma notación, de forma que $|\varphi(\vec{x})| \le \|\varphi\|\|\vec{x}\|$. Por la definición de la aplicación dual $\varphi(f(\vec{x})) = f^*(\varphi)(\vec{x})$ y eso da dos manera de acotar esta cantidad, como $\|\varphi\|\|f(\vec{x})\|$ y como $\|f^*(\varphi)\|\|\vec{x}\|$. Una de ellas puede ser más sencilla que la otra. En términos matriciales es como decir que $A\vec{x}$ puede ser más o menos sencillo de calcular que $A^t\vec{y}$.

4. El interés de los duales a lo bestia

Cuando tienen más relevancia los duales es en espacios vectoriales de dimensión infinita, los cuales se escapan de los cursos de primero y cuando se estudian más adelante el álgebra lineal se transmuta en lo que se llama *análisis funcional*.

Pensemos por ejemplo en el espacio vectorial V de todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con infinitas derivadas tales que se anulan fuera de un intervalo o, más en general, que ellas y sus derivadas multiplicadas por cualquier polinomio tiendan a cero en el infinito. Para cada $g \in V$ la aplicación $f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} gf$ es un elemento del dual (por cierto, esto suena a lo de los vectores tumbados, porque uno puede pensar ingenuamente en una función como una lista infinita de números correspondientes a evaluar en "todos" los valores de la variables y la integral es como una suma). Si no hubiera otros elementos en V^* volveríamos al aburrimiento de que no aporta nada nuevo. Sin embargo, hay muchos más. El más famoso es la δ *de Dirac*

$$\delta : f \longmapsto f(0).$$

Si nos empeñamos en escribir integrales, $\delta(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n f$ con $\{g_n\}$ una sucesión de funciones cada vez más concentradas alrededor del origen con $\int_{-\infty}^{\infty} g_n = 1$. Muchas veces se escoge $g_n(x) = ng(nx)$ con g una función de integral 1 que se anula fuera de $[-1,1]$. Si uno tiene pocos remilgos matemáticos, identificará δ con el límite $\lim g_n$, que no existe, y escribirá

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt = f(0)$$

donde intuitivamente $\delta(t)$ es una función nula para $t \neq 0$ y $\delta(0)$ es un infinito tan bestia que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta = 1$. Si te ha salido sarpullido, no sigas leyendo y mantente alejado de los textos de ingeniería y física hasta que veas la justificación de estas locuras con la *teoría de distribuciones*.

Consideremos la función escalón $H(x)$ que es 1 para $x > 0$ y se anula para $x < 0$ (a veces se pone $H(0) = 1/2$, pero es indiferente aquí). Tenemos el elemento de V^*

$$f \longmapsto -\int_{-\infty}^{\infty} H(t) f'(t)\, dt = -\int_{0}^{\infty} f'(t)\, dt = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\, dt.$$

Ahora bien, si a uno le dejan integrar por partes, formalmente $-\int_{-\infty}^{\infty} Hf' = \int_{-\infty}^{\infty} H'f$ y esto sugiere $\delta = H'$, lo cual no suena mal del todo porque H es localmente constante fuera de 0 y en 0 se necesita una pendiente infinita para subir el escalón. Entonces δ permite derivar funciones que no son derivables. ¿Para qué demonios quiere uno hacer eso? Por ejemplo, en ingeniería H puede modelar conectar un interruptor (pasa o no pasa corriente) y las ecuaciones de los circuitos están llenas de derivadas. Introduciendo unas δ, todo funcionará a las mil maravillas.

¿Demasiada poca fe para creer que realmente estas ensoñaciones tengan alguna utilidad? Vamos a un ejemplo en que partiendo de δ se llega a un resultado matemático tangible libre de infinitos y numéricamente comprobable.

Una vez que hemos derivado funciones no derivables, sumaremos series que no convergen. Consideramos la suma finita, llamada *núcleo de Dirichlet*,

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \cos(2\pi nx).$$

Usando que $\cos(2\pi x)$ es la parte real de $e^{2\pi inx}$ (*fórmula de Euler*) y la suma de una progresión geométrica se sigue

$$D_N(x) = \frac{\operatorname{sen}\left(\pi(2N+1)x\right)}{\operatorname{sen}(\pi x)} \quad \text{si } x \notin \mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad D_N(x) = 2N+1 \quad \text{si } x \in \mathbb{Z}.$$

Si pensamos en la gráfica en $I = [-1/2, 1/2]$ tiene un pico alrededor del origen que se va estrechando y pronunciando según crece N. Es fácil comprobar con la definición original que $\int_I D_N = 1$ porque la integral se anula excepto para $n = 0$. Esto sugiere que $D_N \to \delta$ en I cuando $N \to \infty$. Por la 1-periodicidad de D_N se concluye (si uno es físico) o no causa demasiados escalofríos (si uno es matemático)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi nx).$$

Multiplicando por una función f de V se sigue la increíble fórmula (llamada *de sumación de Poisson*)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi nx)\,dx.$$

Eligiendo $f(x) = e^{-\pi x^2/\alpha^2}$ con $\alpha > 0$ y preguntando el valor de la integral a tu primo ingeniero o a Wolfram Alpha (que será a quien pregunte tu primo), se deduce

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2/\alpha^2} = \alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\alpha^2 n^2}$$

que tiene diversas aplicaciones. En vez de explorar alguna, solo notaremos que con $\alpha = 2\sqrt{\pi}$ permite explicar por qué el cuadrado de $\frac{1}{2}\sum_{n=-15}^{15} e^{-n^2/4}$ es prácticamente indistinguible de π, difiere en el decimal 16. No es que sirva para nada especial, pero te servirá para presumir a la hora del bocadillo.

Autor: Fernando Chamizo
Versión: 2024/11/20
https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/