Maravillas en el país de los determinantes

La fórmula de Cauchy-Binet. Las pobres matrices rectangulares no cuadradas carecen de determinante, sin embargo, el producto de dos matrices rectangulares puede ser una matriz cuadrada y hay una fórmula que relaciona el determinante del resultado con determinantes de trozos cuadrados de las matrices de partida. Esta es la *fórmula de Cauchy-Binet* que afirma

$$\det(AB) = \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\ \#S=m}} \det(A_S^c)\det(B_S^f) \qquad \text{para} \quad A\in\mathcal{M}_{m\times n}(K),\ B\in\mathcal{M}_{n\times m}(K)$$

donde A_S^c significa elegir las m columnas de A especificadas por S y B_S^c elegir las m filas de B indicadas por S. ¡Ah! y $\#S$ indica el cardinal de S, su número de elementos, no es un *hashtag*. Normalmente se aplica esta fórmula con $m \le n$, pero tiene validez general si convenimos, como es habitual, que una suma vacía es nula. Así se obtiene $\det(AB) = 0$ para $m > n$, lo cual es cierto porque $\operatorname{rg}(AB) \le \operatorname{mín}\big(\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\big) < m = \dim(AB)$. Por otro lado, si $n = m$ se obtiene la fórmula fundamental

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

La prueba de la fórmula de Cauchy-Binet (y, en particular, de que el determinante del producto de matrices cuadradas es el producto de determinantes) consiste en tener claro cómo se relacionan los elementos de AB con los de A y B y jugar un poco con las permutaciones. Lo puedes ver en [3].

En el caso $m = 2$ con $K = \mathbb{R}$, si llamamos $\vec{c}$ a la primera columna de B y $\vec{d}$ a la segunda, al tomar $A = B^t$ se sigue

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} \|\vec{c}\|^2 & \vec{c}\cdot\vec{d} \\ \vec{c}\cdot\vec{d} & \|\vec{d}\|^2 \end{vmatrix} = \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\ \#S=2}} \det(B_S^f)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} (c_i d_j - c_j d_i)^2$$

donde $\vec{c}\cdot\vec{d}$ es el producto escalar habitual, $c_1d_1 + \cdots + c_nd_n$, y $\|\vec{c}\|^2 = \vec{c}\cdot\vec{c}$, $\|\vec{d}\|^2 = \vec{d}\cdot\vec{d}$. La positividad del último sumatorio implica

$$(\vec{c}\cdot\vec{d})^2 \le \|\vec{c}\|^2\|\vec{d}\|^2$$

que es lo que se llama *desigualdad de Cacuhy-Schwarz*, quizá la desigualdad más famosa de las matemáticas, con permiso de la triangular.

El lema del determinante de la matriz. Todos sabemos que $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$ es, en general, más falso que los euros de madera. Sin embargo, el *lema del determinante de la matriz*, traducción libre de *matrix determinant lemma* afirma que hay una relación entre $\det(A+B)$ y $\det(A)$ cuando B es de rango uno. En primer lugar te deberías convencer a ti mismo de que una matriz $B \in \mathcal{M}_n(K)$ de rango 1 es siempre de la forma $\vec{u}\vec{v}^t$ con $\vec{u}, \vec{v} \in K^n - \{\vec{0}\}$ entendidos como matrices $n \times 1$. El susodicho lema es la identidad

$$\det(A + \vec{u}\vec{v}^t) = \det(A) + \vec{v}^t A^{-1}\vec{u}\det(A)$$

para $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ invertible. El último sumando es un número, una matriz 1×1, que coincide con $\vec{v}^t C^t \vec{u}$ donde C es la matriz de cofactores. Esto tiene sentido incluso si A no es invertible, es decir, si $\det(A) = 0$. En ese caso resulta $\det(A + \vec{u}\vec{v}^t) = \vec{v}^t C^t \vec{u}$. Para $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ esto se deduce de lo anterior con un argumento de continuidad porque cualquier matriz singular se vuelve regular con un cambio infinitesimal adecuado en sus elementos.

La prueba de la fórmula en el caso invertible es tan breve e ingeniosa que no me resisto a incluirla. Cambiando $\vec{u}$ por $A\vec{u}$ es fácil ver que basta considerar el caso $A = I$. La siguiente igualdad de matrices por bloques se reduce a operar:

$$\begin{pmatrix} I & \vec{0} \\ \vec{v}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + \vec{u}\vec{v}^t & \vec{u} \\ \vec{0}^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \vec{0} \\ -\vec{v}^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \vec{u} \\ \vec{0}^t & 1 + \vec{v}^t\vec{u} \end{pmatrix}.$$

Al tomar determinantes y usando que el determinante de un producto es el producto de determinantes, se sigue $1 \cdot \det(I + \vec{u}\vec{v}^t) \cdot 1 = 1 + \vec{v}^t\vec{u}$, que es justo lo que queríamos probar.

Condensación de Dodgson. ¿Y dónde están las maravillas? Fuera de la comunidad matemática no es universalmente conocido que C. Dodgson, el autor de "Alicia en el país de las maravillas" bajo el sobrenombre de Lewis Carroll, era matemático (aunque no de primera fila), además de clérigo y fotógrafo. Dentro de la comunidad tampoco se conoce tanto su contribución a los determinantes. En [1] se sugiere que la primera prueba impresa del teorema de Rouché-Frobenius (según la terminología del mundo hispano), la cual se basaba en determinantes, se debe a él.

La contribución que ha llegado a nuestros días con su nombre es la *condensación de Dodgson*, un método para calcular determinantes basado en la aplicación repetida de la identidad, llamada a veces *identidad de Desnanot–Jacobi* válida para matrices $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$

$$\det(A)\det(C) = \det(A_{n,n})\det(A_{1,1}) - \det(A_{n,1})\det(A_{1,n})$$

donde $A_{i,j}$ es la matriz A sin la fila i y sin la fila j y C es la matriz "interior" $(n-2)\times(n-2)$ obtenida al eliminar las filas y columnas primeras y últimas. El método de Dodgson aplica esta identidad a bloques con $n = 3$ de la matriz de la que queremos hallar el determinante, de esta forma, C es un número y los determinantes que se calcular son siempre 2×2. En [4] está reproducido el ejemplo del artículo original [2] con detalle. Según Dodgson «el nombre "condensación" parece adecuado [porque] creo que es bastante más corto y simple que cualquiera empleado hasta ahora [para calcular determinantes]». Esto es opinable, además de que hay un problema cuando $\det(C) = 0$.

En [4] hay una demostración directa de la fórmula de condensación. Para una divertida prueba basada en matrimonios promiscuos, mira [5].

Referencias

[1] F. F. Abeles. Determinants and linear systems: Charles L. Dodgson's view. *British J. Hist. Sci.*, 19(3(63)):331–335, 1986.

[2] C. L. Dodgson. Condensation of Determinants, being a new and brief Method for computing their arithmetical values. *Proc. R. Soc. Lond.*, 15:150–155, 1867.

[3] Pr∞fWiki contributors. Cauchy-Binet formula — Pr∞fWiki. `https://proofwiki.org/w/index.php?title=Cauchy-Binet_Formula&oldid=566103`, 2023. [Online; accessed 17-November-20234].

[4] Wikipedia contributors. Dodgson condensation — Wikipedia, the free encyclopedia. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Dodgson_condensation&oldid=1256942534`, 2024. [Online; accessed 17-November-2024].

[5] D. Zeilberger. Dodgon's determinant-evaluation rule proved by TWO-TIMING MEN and WOMEN. *Electron. J. Comb.*, 4(2):research paper r22, 2, 1997. `https://arxiv.org/abs/math/9808079`.

Autor: Fernando Chamizo
Versión: 2024/11/17
https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/