Teoría espectral

Ingeniería Biomédica   Curso: Matemáticas I

Fernando Chamizo   https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/

1. Autovalores y autovectores

En un espacio vectorial V de dimensión finita n, una vez fijada una base, un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ viene determinado por una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, esto es, por n^2 números. En algunas aplicaciones se produce una simplificación considerable cuando A es diagonal y por tanto determinada solo por n números. Sin conocer siquiera esas aplicaciones, suena creíble que sea un objetivo deseable si pensamos en que un sistema lineal de ecuaciones con matriz diagonal es trivial, porque todas las ecuaciones están desacopladas. De la misma forma, un endomorfismo con matriz diagonal en n dimensiones se desacopla en n endomorfismos en dimensión 1 tan tontos como multiplicar por un número. La *teoría espectral* estudia cuándo tal desacople es posible, incluso en el contexto de dimensión infinita, mucho más difícil, que excede a este curso y es crucial en física cuántica.

Comenzamos con una definición que recoge todo lo que vamos a hacer, pero que te resultará, seguramente, demasiado matemática hasta que veamos su realización con matrices. Dado un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$ se dice que $\vec{v} \in V - \{\vec{0}\}$ es un *vector propio* o *autovector* de f si $\vec{v} \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$ para cierto $\lambda \in K$. A este λ se le llama *valor propio* o *autovalor*.

Recordando la definición de núcleo, los vectores propios no son otra cosa que los vectores no nulos tales que $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Nosotros nos vamos a fijar solo en el caso $V = K^n$ y por tanto $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ con $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Aunque un matemático muy rigorista hablaría siempre de los autovectores y autovalores del endomorfismo f, con un ligero abuso de notación, casi todo el mundo habla de los autovectores y autovalores de la matriz cuadrada A. Seguimos esta política y en lo sucesivo se aplicarán estos conceptos solo a matrices. Así pues, un vector propio o autovector de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es un vector no nulo $\vec{v} \in K^n$ que cumple $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ y, en ese caso, se dice que λ es el valor propio o autovalor correspondiente a $\vec{v}$ de la matriz A.

Los autovectores son soluciones no triviales del sistema homogéneo $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, por tanto, podemos hallar los autovalores imponiendo $\det(A - \lambda I) = 0$ que equivale a que el sistema sea compatible indeterminado y podemos hallar los autovectores resolviendo los sistemas correspondientes. La ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$ que determina los autovalores se denomina *ecuación característica* y $\det(A-\lambda I)$ es el *polinomio característico*. Es fácil convencerse de que realmente es un polinomio y de que su grado es n cuando $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

Como primer ejemplo, hallemos los autovalores y autovectores de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Primero calculamos el polinomio característico:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

Al resolver $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ obtenemos los autovalores $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 5$ (la ordenación es indiferente). Para $\lambda_1 = 2$ los vectores propios son los $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 - \{\vec{0}\}$ que satisfacen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}, \qquad \text{lo que implica} \qquad \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mu \neq 0.$$

De la misma manera, para $\lambda_2 = 5$ se tiene

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \neq 0.$$

Con ello hemos hallado todos los autovectores.

Para cada autovalor λ el conjunto de soluciones de $(A-\lambda I)\vec{x} = \vec{0}$, llamado *autoespacio* de λ, es necesariamente infinito. Un abuso de notación muy habitual es restringir el nombre *autovectores* (o *vectores propios*) a los elementos de bases fijadas de los autoespacios. Así en el ejemplo anterior muchos dirían que $(2,-1)^t$ es “el” autovector correspondiente a $\lambda_1 = 2$, sobreentendiendo que el resto son múltiplos suyos, o dirían que la matriz A tiene dos autovectores que son $(2,-1)^t$ y $(1,1)^t$. Este abuso de notación es difícil de aceptar por los matemáticos ya que hay infinitos autovectores y no hay una manera canónica de especificarlos. Sin embargo está tan extendido fuera de las matemáticas que seguramente es sensato hacer alguna concesión.

Una ecuación polinómica sobre $\mathbb{C}$ siempre tiene raíces en $\mathbb{C}$, pero en $\mathbb{R}$ esto no es cierto en general y una matriz real puede tener autovalores complejos. Consideremos, por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

No tiene autovalores (ni por tanto autovectores) en $\mathbb{R}$ porque la ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$. Sin embargo, en $\mathbb{C}$, $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$ son valores propios válidos y para λ_1

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \neq 0.$$

Mientras que para λ_2

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} = \mu \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mu \neq 0.$$

Por cierto, los cálculos para λ_2 son innecesarios si uno se fija en que basta conjugar los de λ_1.

Por tanto $\vec{v}_1 = (i,1)^t$ y $\vec{v}_2 = (-i,1)^t$ son vectores propios válidos de A y la gente de a pie diría que son "los" vectores propios de A.

Las raíces múltiples del polinomio característico inducen algunas complicaciones que serán fundamentales después. Consideremos el siguiente ejemplo en dimensión 3:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -6 & -5 & -3 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tras algunos cálculos, obtenemos que el polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ -6 & -5-\lambda & -3 \\ 6 & 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = -(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

De esta forma, tenemos $\lambda_1 = 1$ (doble) y $\lambda_2 = 2$. Aplicando reducción de Gauss al sistema $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \vec{0}$, se tiene

$$A - \lambda_1 I \underset{f_1 \mapsto f_1/2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -6 & -6 & -3 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 + 3f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 3f_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando $x_2 = \mu_1$, $x_3 = \mu_2$, como es habitual, se obtiene $x_1 = -\mu_1 - \mu_2/2$. Es decir, las soluciones son

$$\vec{x} = \mu_1(-1,1,0)^t + \mu_2(-1/2,0,1)^t.$$

Entonces hay dos autovectores asociados a λ_1, $\vec{v}_1 = (-1,1,0)^t$, $\vec{v}_2 = (-1/2,0,1)^t$, con el abuso de notación. En realidad hay todo un subespacio de dimensión dos salvo el vector nulo. Por cierto, los autovectores siempre se pueden multiplicar por constantes no nulas, así pues es lícito escoger $\vec{v}_2 = (1,0,-2)^t$.

Para λ_2, resolviendo el sistema $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0}$ se obtiene que los autovectores son los múltiplos no nulos de $\vec{v}_3 = (2,-3,3)$.

Los ejemplos con matrices complejas no entrañan dificultades especiales más allá de que seguramente no estamos muy entrenados para resolver ecuaciones algebraicas con coeficientes complejos. En realidad tampoco lo estamos completamente para las de coeficientes reales y siempre los ejercicios deben estar muy preparados para que la ecuación característica sea asequible. Solo por dar un ejemplo, consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \qquad \text{que cumple} \quad |A - \lambda I| = \lambda^2 - (2+i)\lambda + 1 + i.$$

Aplicando la solución de la ecuación de segundo grado, se obtiene $\lambda = \frac{2+i\pm i}{2}$, por tanto los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1+i$. Los autovectores son las soluciones no triviales de los sistemas:

$$\begin{pmatrix} 2i & -1 \\ -2 & -i \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} i & -1 \\ -2 & -2i \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

En el primer sistema podemos tomar $\vec{v}_1 = (1, 2i)^t$ y en el segundo $\vec{v}_2 = (1, i)^t$ como soluciones no triviales.

Una vez que hemos visto varios ejemplos, vamos al concepto fundamental que recoge la motivación del comienzo del apartado.

Se dice que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es *diagonalizable* sobre K si existe una base de K^n formada por autovectores. Se puede demostrar que los autovectores correspondientes a autovalores distintos son siempre linealmente independientes así que comprobar que $A \in \mathcal{M}_n(K)$ es diagonalizable se reduce a contar si hay n autovectores, con el abuso de notación que no gusta a los matemáticos.

Repasemos los ejemplos vistos hasta ahora:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -6 & -5 & -3 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Se tiene que A_1 es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ (y sobre $\mathbb{C}$), porque hay dos autovectores $\vec{v}_1 = (2, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1)$. De hecho si solo nos preguntasen si es diagonalizable, con ver que hay dos autovalores no harían falta más cuentas, pues para cada uno hay al menos un autovector. Por la misma razón, A_2 y A_4 son diagonalizables sobre $\mathbb{C}$. No lo son sobre $\mathbb{R}$ porque en el primer caso hay autovalores complejos (que necesariamente dan autovectores complejos) y en el segundo porque la matriz de partida ya es compleja. Los cálculos sí serían necesarios para ver que A_3 es diagonalizable porque solo hay dos autovalores. Sin embargo, ya vimos que en realidad podemos extraer dos de ellos para λ_1 y uno más para λ_3. Según nuestros cálculos, una base válida de vectores propios es:

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

En definitiva, todos los ejemplos que hemos visto son diagonalizables ya sea en $\mathbb{R}$ o al menos en $\mathbb{C}$ si hay autovalores que no son reales. Esta es la situación común, pero hay contraejemplos. La clave está en los autovalores múltiples, pues un resultado asegura que un factor $(\lambda-\lambda_j)^{n_j}$ en el polinomio característico implica que el autoespacio de λ_j tiene a lo más dimensión n_j (a lo más hay n_j autovectores con el abuso de notación), pero nada asegura que sea exactamente n_j.

Consideremos por ejemplo
$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$
que tiene polinomio característico $\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$, lo que da lugar a un único valor propio $\lambda_1=2$, y al resolver $(A-2I)\vec{x}=0$ todas las soluciones son $\mu(-1,1)^t$. No podemos extraer más que un autovector (y sus múltiplos).

Un ejemplo en dimensión 3 es:
$$A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ -6 & -3 & -1\\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix}\qquad \text{que tiene}\quad |A-\lambda I|=-(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$
A pesar de que el polinomio característico es el mismo que en un ejemplo diagonalizable anterior, dando lugar a $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$; la matriz A no es diagonalizable, porque con λ_2 solo obtenemos un autovector (y sus múltiplos) y λ_1 no provee dos autovectores independientes ya que aplicando eliminación de Gauss a $A-\lambda_1 I$
$$\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ -6 & -4 & -1\\ 6 & 4 & 1\end{pmatrix}\underset{f_3\mapsto f_3+f_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ -6 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\underset{f_2\mapsto 2f_2+3f_1}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$
lo que prueba que tiene rango dos y por tanto la solución de $(A-\lambda_1 I)\vec{x}=\vec{0}$ solo tiene un parámetro libre.

Lo que da valor al concepto de ser diagonalizable es la siguiente propiedad:

> Propiedad fundamental. *Si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable sobre K entonces $A=CDC^{-1}$ donde C es cualquier matriz que tiene por columnas una base de autovectores y D es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los autovalores correspondientes.*

La conexión con lo dicho al comienzo del apartado radica en lo siguiente: Si pensamos en un endomorfismo $K^n\longrightarrow K^n$ como en una función $\vec{y}=A\vec{x}$ con $A\in\mathcal{M}_n(K)$, entonces tras el cambio de variable $\vec{x}=C\vec{x}'$, $\vec{y}=C\vec{y}'$ se sigue $\vec{y}'=C^{-1}AC\vec{x}'=D\vec{x}'$. Es decir, tras el cambio, el endomorfismo se desacopla en operaciones sencillas que consisten en multiplicar por separado cada una de las n coordenadas por un número real.

Por decir un par de ejemplos, según los cálculos anteriores, la propiedad fundamental para A_1 se podría escribir como

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para A_3 asegura

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

La ordenación de los autovectores debe ser coherente con la de los autovalores. Es decir, si ponemos en la columna i de C el autovector correspondiente a λ_j entonces debemos tomar necesariamente $d_{ii} = \lambda_j$.

2. El teorema espectral

El resultado que se recoge en este apartado es de una importancia capital en física y matemáticas y, por extensión, en algunos de sus usos en ingeniería, pero, para ser sinceros, no tiene ninguna influencia sobre el tipo de cálculos que aparecen en los problemas, que ya han sido recogidos en el apartado anterior.

> Teorema espectral. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, es decir, $A = A^t$, entonces es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y siempre se puede escoger una base ortonormal de autovectores.*

Podría cambiarse ortonormal por ortogonal, porque la única diferencia está en si normalizamos o no lo hacemos. El enunciado se puede parafrasear diciendo que la C que aparece al diagonalizar siempre se puede escoger de forma que sea una matriz ortogonal.

En realidad, hay un resultado más general que se aplica a todas las matrices de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que cumplen $A = \overline{A}^t$, pero aquí no veremos ejemplos complejos. En ellos, la diagonalización pasa a ser sobre $\mathbb{C}$.

Una consecuencia fácil del resultado anterior, aunque no totalmente inmediata si hay autovalores con varios vectores propios (independientes) es:

> *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, los autovectores correspondientes a autovalores distintos son siempre ortogonales.*

Tanto esta conclusión como el propio teorema espectral son muy sorprendentes. A pesar de que la demostración no es complicada, suena muy extraño que la simetría de una matriz real obligue a que todos los valores propios sean reales, que haya suficientes vectores propios para diagonalizar y que además sean perpendiculares.

Exploremos un ejemplo de dimensión 2 y otro de dimensión 3. El propósito es solo maravillarse de que estas propiedades se cumplan, los cálculos serán como los hechos hasta ahora. Vamos a hallar una base ortonormal en la que la A diagonalice y una ortogonal en la que lo haga B donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En el primer cao el polinomio característico es $|A-\lambda I| = \lambda^2+5\lambda+50$ y, resolviendo la ecuación, $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -10$. Resolviendo $(A-5I)\vec{x} = \vec{0}$ se obtiene el vector propio $\vec{v}_1 = (2,1)^t$ (y sus múltiplos). De la misma forma, $(A+10I)\vec{x} = \vec{0}$ conduce a $\vec{v}_2 = (-1,2)^t$. Son ortogonales en la línea de la consecuencia del teorema espectral. La base buscada se obtiene normalizando: $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ con $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^t$ y $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)^t$.

Para B, una manera más o menos rápida de obtener el polinomio característico es

$$|B-\lambda I| \underset{c_1\mapsto c_1-c_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{f_3\mapsto f_1+f_3}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la primera columna, $|B-\lambda I| = (1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+10) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-5)$ y los autovalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 5$. Resolviendo los sistemas $(B-\lambda_j I)\vec{x} = \vec{0}$ se obtienen los autovectores (salvo multiplicar por constantes)

$$\vec{v}_1 = (-1,0,1)^t, \qquad \vec{v}_2 = (1,-1,1)^t \qquad \text{y} \qquad \vec{v}_3 = (1,2,1)^t.$$

En sintonía con el resultado, salen automáticamente ortogonales y conforman la base buscada.

3. Algunas aplicaciones

La diagonalización de matrices simplifica los cálculos que aparecen en ciertas aplicaciones. Aquí veremos dos de ellas, desde un punto de vista teórico, que guardan relación con temas que forman parte de los planes de estudios de ingeniería.

Muchos algoritmos están basados en la repetición: la salida del algoritmo, o parte de ella, se toma como nueva entrada cierto número de veces. Si tal algoritmo viene dado por una aplicación lineal $K^n \longrightarrow K^n$, surge el problema de determinar la sucesión de vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ definidos mediante

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k \qquad \text{con} \quad k = 0,1,2,\dots \tag{1}$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(K)$ y $\vec{x}_0 \in K^n$ están fijados.

En principio, esto es muy fácil: $\vec{x}_1 = A\vec{x}_0$, $\vec{x}_2 = A\vec{x}_1 = A^2\vec{x}_0$ y, en general, $\vec{x}_k = A^k\vec{x}_0$. Esta fórmula es exacta, pero demasiado teórica. No nos da intuición acerca del comportamiento a la larga de la sucesión, lo cual es a menudo fundamental para responder a algunas preguntas naturales. Deseamos una fórmula más explícita, a través de un cálculo sencillo de A^k, y ahí es donde entra la diagonalización.

> *Sea $A \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalizable. Si $C \in \mathcal{M}_n(K)$ tiene por columnas una base de vectores propios y D es la matriz diagonal compuesta por los valores propios respectivos, $A^k = CD^kC^{-1}$. En particular, la solución de (1) es $\vec{x}_k = CD^kC^{-1}\vec{x}_0$.*

El punto importante a observar es que el cálculo de D^k es sencillo, pues se reduce a elevar a k cada elemento de la diagonal.

La prueba del resultado es poco más que repetir nuestras conclusiones sobre diagonalización. Sabemos $C^{-1}AC = D$ y, por tanto, $A = CDC^{-1}$. De aquí, $A^2 = CDC^{-1}CDC^{-1} = CD^2C^{-1}$, $A^3 = A^2A = CD^2C^{-1}CDC^{-1} = CD^3C^{-1}$ y así sucesivamente.

Comencemos con un ejemplo en el que sería fácil deducir el resultado experimentalmente. Queremos resolver (1) para

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -20 & 11 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \text{ arbitrario.}$$

El polinomio característico es $(\lambda^2 - 121) + 120 = \lambda^2 - 1$, por tanto tenemos dos valores propios $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$. Vectores propios respectivos son $\vec{v}_1 = (3,5)^t$ y $\vec{v}_2 = (1,2)^t$. Escribiendo $\vec{x}_0 = (a,b)^t$, de acuerdo con el resultado anterior,

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 1^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \big(6(-1)^k - 5\big)a + 3\big(1 - (-1)^k\big)b \\ 10\big((-1)^k - 1\big)a + \big(6 - 5(-1)^k\big)b \end{pmatrix}$$

donde para la última igualdad se han operado las matrices. Más sencillo es darse cuenta de que $D^2 = I$, porque los autovalores son ± 1. Por tanto $D^k = D$, y equivalentemente $A^k = A$, para k impar mientras que $D^k = I$, y $A^k = I$, para k par. Por consiguiente,

$$\vec{x}_k = A\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} -11a + 6b \\ -20a + 11b \end{pmatrix} \quad \text{si } k \text{ es impar} \qquad \text{y} \qquad \vec{x}_k = x_0 \quad \text{si } k \text{ es par.}$$

Esto es lo mismo que la fórmula anterior escrito de forma menos aparatosa.

El siguiente ejemplo sería más difícil de resolver experimentalmente:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 8x_k + 6y_k \\ y_{k+1} = -3x_k - y_k \end{cases} \qquad \text{con} \quad x_0 = y_0 = 1.$$

En forma matricial, escribiendo $\vec{x}_k = (x_k, y_k)^t$,

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $|A - \lambda I| = \lambda^2 - 7\lambda + 10$, por tanto los valores propios resultan $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$. Para calcular vectores propios respectivos, debemos hallar soluciones de los sistemas

$$(A - \lambda_1 I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \qquad \text{y} \qquad (A - \lambda_2 I)\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}.$$

Elecciones naturales son $\vec{v}_1 = (-1, 1)^t$ y $\vec{v}_2 = (-1, 1)^t$, con lo que la sucesión $\vec{x}_k$ responde a la fórmula

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Operando, se tiene

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^k - 2^k & 2 \cdot 5^k - 2^{k+1} \\ -5^k + 2^k & -5^k + 2^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5^k - 3 \cdot 2^k \\ -2 \cdot 5^k + 3 \cdot 2^k \end{pmatrix}.$$

Es decir, $x_k = 4 \cdot 5^k - 3 \cdot 2^k$, $y_k = -2 \cdot 5^k + 3 \cdot 2^k$. Cambiando $(1, 1)^t$ por un vector genérico, se tendría la solución para cualquier valor inicial.

Hallemos ahora una fórmula general para el vector $\vec{x}_k$ determinado por (1) con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz está medio diagonalizada lo que hace que sea sencillo calcular el polinomio característico $(\lambda^2 - 5\lambda + 6)(5 - \lambda)$. Con ello, los valores propios son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 5$. Son distintos y entonces A es diagonalizable. Algunos cálculos llevan a que vectores propios correspondientes a estos valores propios son $\vec{v}_1 = (2, 1, 0)^t$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)^t$ y $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)^t$. El resultado implica

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 3^k & 0 \\ 0 & 0 & 5^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k+1} - 3^k \\ 2^k - 3^k \\ -5^k \end{pmatrix}.$$

A modo de comprobación, para $k = 0$ está claro que obtenemos $\vec{x}_0$ y para $k = 1$ el resultado coincide con $A\vec{x}_0$.

Un pequeño truco cuando $\vec{x}_0$ toma un valor explícito que evita los tediosos cálculos de la inversa es que $C^{-1}\vec{x}_0$ es la solución del sistema $C\vec{x} = \vec{x}_0$. Así, en el ejemplo anterior $C^{-1}(1,0,-1)^t$ es $(1,-1,-1)^t$ porque esta es la solución de $2x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = 0$, $x_3 = -1$.

La segunda aplicación que estudiaremos es relativa a la solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. Es decir, ecuaciones del tipo:

$$\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t), \qquad \text{con} \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \tag{2}$$

donde A es una matriz cuadrada constante, $\vec{x}(t)$ es una función vectorial dependiendo de una variable real t y $\vec{x}\,'(t)$ es su derivada, $\frac{d}{dt}x(t)$ si lo prefieres. La mayor parte de las veces $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, pero la teoría sirve igualmente para el caso complejo. De alguna forma, (2) es la versión en "tiempo continuo" de (1), en la que hay actualizaciones inmediatas. En esta línea, existe una forma (complicada), que no veremos, de resolver (2) basada en potencias de matrices. Para tranquilidad de los más teóricos, en cursos de matemáticas se prueba que (2) siempre tiene solución única. Después de estos comentarios, pasamos a ver un método basado en diagonalización para hallarla:

> *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es diagonalizable, $\vec{x}(t) = C\exp(Dt)C^{-1}\vec{x}_0$ es solución de (2), donde se ha usado la notación anterior y $\exp(Dt)$ es la matriz diagonal obtenida al reemplazar d_{ii} en D por $e^{d_{ii}t}$.*

Definiendo $\exp(At) = C\exp(Dt)C^{-1}$, la solución es $\vec{x}(t) = \exp(At)\vec{x}_0$ y esta fórmula es bastante sugestiva porque formalmente verifica (2) si no se tienen escrúpulos sobre derivar matrices.

Supongamos que queremos resolver

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica es $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ y produce los valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. Como $\{(2,1)^t, (5,3)^t\}$ es una base de vectores propios correspondiente, el resultado anterior conduce a la solución,

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} + 5e^t \\ e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}.$$

Muchas veces estas ecuaciones diferenciales no se presentan en forma vectorial. Por ejemplo, un enunciado podría ser resolver

$$\begin{cases} x' = -11x + 6y, \\ y' = -20x + 11y, \end{cases} \qquad \text{con} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Con la notación anterior, esto es es $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ donde $\vec{x} = (x,y)^t$, $\vec{x}_0 = (1,1)^t$ y A es la matriz del primer ejemplo de solución de (1). Tomando de ese ejemplo los autovalores y autovectores, se tiene

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{-t} - 2e^t \\ 5e^{-t} - 4e^t \end{pmatrix}.$$

A modo de comprobación, verifiquemos la primera ecuación del enunciado. Se cumple $x'(t) = -3e^{-t} - 2e^t$ y esto coincide con $-11\big(3e^{-t} - 2e^t\big) + 6\big(5e^{-t} - 4e^t\big)$.

Si ahora aprovechamos el cálculo de los autovalores y autovectores del siguiente ejemplo que habíamos visto para sucesiones, tendremos que la solución de

$$\vec{x}' = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

viene dada por

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{5x} - e^{2x} \\ -2e^{5x} + e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Un último ejemplo ilustra cómo para obtener resultados reales a veces es conveniente pasar por los complejos. Resolvamos

$$\vec{x}' = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica es $\lambda^2 + 4 = 0$ y debemos ir a $\mathbb{C}$ para que tenga solución. Los valores propios son $\lambda_1 = -2i$ y $\lambda_2 = 2i$. Una base de autovalores respectivos es $\big\{(-2i,1)^t, (2i,1)^t\big\}$ con lo que tenemos

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2it} & 0 \\ 0 & e^{2it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2i & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Si nos tomamos el trabajo de operar, resulta

$$\vec{x}(t) = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} -2i\big(e^{2it} + e^{-2it}\big) & 4\big(e^{2it} - e^{-2it}\big) \\ -e^{2it} + e^{-2it} & -2i\big(e^{2it} + e^{-2it}\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) - 6\,\mathrm{sen}(2t) \\ 3\cos(2t) + \mathrm{sen}(2t) \end{pmatrix}$$

donde para la segunda igualdad se ha sustituido $e^{\pm 2it} = \cos(2t) \pm i\,\mathrm{sen}(2t)$.

A primera vista, parece un milagro que los números complejos se simplifiquen y el resultado sea real. La explicación radica en la invariancia por la conjugación. Si A es una matriz real, al conjugar un par autovalor y autovector, se obtiene otro par válido. De ahí que $C\exp(Dt)C^{-1}$ no cambie al conjugar, ni por tanto la solución de $\vec{x}(t)$ de (2).

Para que no te sientas estafado si alguien te lo explica, conociendo el *oscilador armónico* de física hay una forma muy breve (sin diagonalizar) de resolver este ejemplo.

4. La forma canónica de Jordan

Hemos visto que hay ciertos problemas que podemos resolver con matrices diagonalizables. La pregunta natural es qué hacer con las que no son lo son. La respuesta es que casi se diagonalizan y su forma casi diagonal todavía sirve de algo en aplicaciones como las vistas antes, aunque no entraremos en este último punto. Para no limitarnos en los números que podemos escoger, consideraremos en todo este apartado que trabajamos sobre $\mathbb{C}$.

Para cualquier matriz en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonalizable o no, el polinomio característico es de la forma

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^n \prod_j (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \qquad \text{con} \qquad \sum_j n_j = n.$$

Si para cada $\lambda = \lambda_j$ hay n_j vectores propios (linealmente independientes), entonces A es diagonalizable. El problema surge cuando hay menos. Incluso si no hay suficientes autovectores, un resultado permite asociar a cada autovalor λ_j un *subespacio invariante* de dimensión n_j. Esto significa que hay n_j vectores linealmente independientes $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n_j}\}$ tales que $A\big(\mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n_j}\})\big) \subset \mathcal{L}(\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n_j}\})$. Resulta que siempre es posible escoger estos $\vec{v}_k$ de forma que sean o autovectores o “casi” autovectores. Con ellos se forma una matriz C y el análogo de la propiedad fundamental es $A = CJC^{-1}$ donde J una matriz que es o diagonal o “casi” diagonal llamada *forma canónica de Jordan*. La teoría general es complicada y de limitado interés para la mayoría de los ingenieros. Por ello, nos restringiremos a los casos de dimensión 2 y 3. Si tienes curiosidad, más adelante, en letra pequeña puedes leer un poco sobre el caso general.

Cualquier $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ se puede escribir como $A = CJC^{-1}$ donde

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \textit{o bien} \qquad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Digamos $C = \big(\vec{v}_1|\vec{v}_2\big)$. El primer caso corresponde a que sea diagonalizable y ya sabemos que basta tomar los $\vec{v}_j$ que sean autovectores. En el segundo caso, el no diagonalizable, se escoge $\vec{v}_2$ arbitrario para el que $\vec{v}_1 = (A - \lambda_1 I)\vec{v}_2$ sea un vector no nulo.

Cualquier $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se puede escribir como $A = CJC^{-1}$ donde

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \textit{o bien} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \textit{o bien} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Digamos $C = \big(\vec{v}_1|\vec{v}_2|\vec{v}_3\big)$. De nuevo, el primer caso es el diagonalizable y sabemos que debemos tomar los $\vec{v}_j$ que sean autovectores. En el segundo, $\vec{v}_2$ se escoge como un vector arbitrario tal que $(A-\lambda_1 I)^2\vec{v}_2=\vec{0}$ y $\vec{v_1}=(A-\lambda_1 I)\vec{v}_2\neq\vec{0}$, finalmente $\vec{v}_3$ es un autovector para λ_2 que no sea múltiplo de $\vec{v}_1$. En el tercer caso, se escoge $\vec{v}_3$ arbitrario para el que $(A-\lambda_1)^2\vec{v}_3\neq\vec{0}$ y se toman $\vec{v}_2=(A-\lambda_1 I)\vec{v}_3$, $\vec{v}_1=(A-\lambda_1 I)\vec{v}_2$.

Para distinguir entre los dos casos no diagonalizables, tendremos la segunda J si hay dos vectores propios (no proporcionales) y la tercera si solo hay uno. En realidad, siempre que haya dos autovalores distintos, estamos seguros de que es la segunda (el primero será de multiplicidad dos) y el único caso ambiguo que requiere calcular los autovectores es en el que hay un solo un autovalor $\lambda=\lambda_1$ porque podría ser el primer caso no diagonalizable con $\lambda_2=\lambda_1$ o el segundo.

Estas matrices J diagonales o casi diagonales se dice que son la *forma canónica de Jordan* de la matriz A.

Estos son casos particulares del *teorema de Jordan* que asegura que cualquier matriz cuadrada compleja A se puede escribir como CJC^{-1} donde J es su forma canónica de Jordan, una matriz del tipo

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & O & O & \dots & O\\ O & J_{n_2}(\lambda_2) & O & \dots & O\\ O & O & J_{n_3}(\lambda_3) & \dots & O\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O & O & O & \dots & J_{n_k}(\lambda_k)\end{pmatrix} \qquad \text{donde} \quad J_n(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda & 1\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Cada uno de los bloques $J_{n_i}(\lambda_i)$ se dice que es una *celda de Jordan*. La forma canónica de Jordan es única salvo reordenar estas celdas. El hecho de que existan demostraciones relativamente breves del teorema de Jordan no se traduce en que el algoritmo para hallar la forma canónica de Jordan o matriz C sea sencillo.

La forma canónica de Jordan salva parcialmente fórmulas empleadas en algunas aplicaciones, como las del apartado anterior. A título de curiosidad, cuando elevamos a n las matrices de los casos no diagonales de los resultados anteriores se obtiene, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1}\\ 0 & \lambda_1^n\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & 0\\ 0 & \lambda_1^n & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda_1^{n-2}\\ 0 & \lambda_1^n & n\lambda_1^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda_1^n\end{pmatrix}.$$

Se entiende $\lambda_j^0=1$ incluso si λ_j fuera nulo.

Analicemos los siguientes ejemplos, para convencernos de que es sencillo decidir cuál es la forma canónica J:

$$A_1=\begin{pmatrix} 0 & 4\\ -1 & -4\end{pmatrix}, \qquad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 3 & -2 & -1\\ -4 & 4 & 3\end{pmatrix}, \qquad A_3=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Con cálculos bastante rápidos se deduce que los polinomios característicos son respectivamente $(\lambda+2)^2$, $(1-\lambda)^2(\lambda+1)$ y $(2-\lambda)^3$, resultando entonces un solo autovalor para A_1 y A_3 y dos para A_2. Como A_1+2I no es la matriz nula, A_1 tiene un solo vector propio, salvo múltiplos, y estamos en el caso no diagonalizable del resultado en $\mathbb{C}^2$ con $\lambda_1=-2$. Para A_2, el autovalor de multiplicidad dos es $\lambda_1=1$ y como $(A_2-I)\vec{x}=\vec{0}$ tiene un conjunto de soluciones de dimensión 1 y, por supuesto, también lo tiene $(A_2 - \lambda_2 I)\vec{x} = \vec{0}$ con $\lambda_2 = -1$, obtenemos la segunda forma del resultado en $\mathbb{C}^3$ con estos λ_j. Finalmente, A_3 solo tiene el autovalor $\lambda_1 = 2$ y $(A_3 - 2I)\vec{x} = \vec{0}$ solo tiene una solución y sus múltiplos, por tanto se tiene la tercera forma del resultado en $\mathbb{C}^3$.

En definitiva, las formas canónicas respectivas de los ejemplos anteriores son:

$$J_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es el número de autovectores (independientes) el que determina la forma canónica en dimensiones $n = 2$ y $n = 3$, no el número de autovalores, ya que este último no permite decidir ni siquiera si la matriz es diagonalizable o no. Veamos otros ejemplos ligeramente singulares:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}.$$

La matriz A_4 solo tiene un autovalor, $\lambda_1 = 2$, pero la dimensión del espacio de soluciones de $(A_4 - 2I)\vec{x} = \vec{0}$ es dos, entonces disponemos de dos autovectores independientes y la forma canónica de Jordan debe ser la segunda del resultado en $\mathbb{C}^3$ con $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Por otro lado, A_5 tiene dos autovalores, $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Como existen dos vectores independientes con $(A_5 - I)\vec{v} = \vec{0}$ entonces es diagonalizable (porque a estos le podemos añadir un autovector correspondiente a λ_2 para formar una base). Por tanto, la forma canónica de Jordan es la primera del resultado en $\mathbb{C}^3$ con $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$. La matriz A_6 es solo para ilustrar que el caso complejo no alberga ninguna dificultad adicional, aparte de nuestra posible falta de práctica con estos números. El polinomio característico es λ^2 por tanto, tenemos un solo autovalor $\lambda_1 = 0$. Está claro que A_6 tiene un solo vector propio, salvo múltiplos, porque no es la matriz nula. En conclusión tenemos como forma canónica de Jordan la segunda del resultado en $\mathbb{C}^2$ con $\lambda_1 = 0$. Para resumir, las formas canónicas de Jordan respectivas son:

$$J_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad J_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad J_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para calcular C hay que seguir la receta incluida en los resultados anteriores, como permite cierta libertad al escoger algunos vectores, C no es única.

Veamos el cálculo en algunos de los ejemplos anteriores. Para A_1, el vector $\vec{v}_2 = (1,0)^t$ cumple $(A_1 + 2I)\vec{v}_2 = (2,-1)^t \neq \vec{0}$ y entonces C con columnas $(2,-1)^t$ y $(1,0)^t$ es una elección válida. Si uno quisiera comprobar el resultado habría que verificar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

En realidad, numéricamente es más simple y equivalente comprobar $A_1\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$ y $A_1\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \lambda_1\vec{v}_2$

Con la elección $\vec{v} = (1,1)^t$ habríamos obtenido una matriz C con columnas $(6,-3)^t$ y $(1,1)^t$ que también es válida. El primer vector debe ser autovector y por ello ha resultado un múltiplo del calculado antes.

En el caso de A_2, el valor propio de multiplicidad dos es $\lambda_1 = 1$ y se tiene

$$(A_2-\lambda_1 I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 4 \\ 8 & -8 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A_2-\lambda_1 I)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad (A_2-\lambda_1 I) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Por tanto podemos tomar $\vec{v}_2 = (1,0,2)^t$, $\vec{v}_1 = (A_2 - I)\vec{v}_2 = (1,1,0)^t$ y $\vec{v}_3$ un vector propio correspondiente a $\lambda_2 = -1$, por ejemplo $\vec{v}_3 = (0,-1,1)^t$. La comprobación ahora de que se cumple $A_2 = CJC^{-1}$ sería un poco larga (y no muy aconsejable para verificar el resultado).

Para A_3 el único valor propio era $\lambda_1 = 2$ y había una única celda de Jordan. El cálculo de $(A_3-2I)^2$ lleva a una matriz cuyo único elemento no nulo es el segundo de la primera fila por tanto podemos tomar $\vec{v}_3 = (0,1,0)^t$, $\vec{v}_2 = (A_3-2I)\vec{v}_3 = (3,0,-1)^t$ y $\vec{v}_1 = (A_3-2I)\vec{v}_2 = (1,0,0)^t$.

Como último ejemplo de base de Jordan, hallemos una para A_4. Recordemos que era de la segunda forma del resultado en $\mathbb{C}^3$. La diferencia con respecto a A_2 es que ahora $\lambda_1 = \lambda_2$, el único autovalor es 2. La matriz $(A_4-2I)^2$ es nula, en sintonía con lo dicho sobre las potencias de celdas de Jordan y entonces no hay otra restricción sobre $\vec{v}_2$ más que $(A_4-2I)\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ (que no sea autovector). Por ejemplo, tomemos $\vec{v}_2 = (1,0,0)^t$ que da lugar a $\vec{v}_1 = (A_4-2I)\vec{v}_2 = (3,3,0)^t$. Como $\vec{v}_3$ hay que escoger un autovector que no sea múltiplo de $\vec{v}_1$, por ejemplo $(1,0,3)^t$.

El resto de los ejemplos antes enunciados no aportan ninguna novedad.