Determinantes

Ingeniería Biomédica Curso: Matemáticas I

Fernando Chamizo https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/

1. Definición y propiedades

Un determinante es un número que se asocia a cada matriz cuadrada. Aparecieron en matemáticas allá hacia finales del siglo XVII con la motivación de saber qué debe cumplir un sistema con n ecuaciones y n incógnitas para que tenga solución única. Nosotros sabemos que la respuesta es que el rango de la matriz debe ser n. Esto estaba demasiado lejos de la orientación de la teoría de aquellos tiempos remotos y querían, al igual que muchos alumnos de hoy en día, una fórmula.

Digamos que el sistema es $A\vec{x} = \vec{b}$ con $A \in \mathcal{M}_n$. El caso $n = 1$ es trivial, $x_1 = b_1/a_{11}$ para $a_{11} \neq 0$. Si $a_{11} = 0$ la ecuación sería del tipo $0x_1 = b_1$ que no tiene solución ($b_1 \neq 0$) o tiene infinitas ($b_1 = 0$). En el caso $n = 2$, utilizando $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ y aprovechando las cuentas que hicimos para el cálculo de la matriz inversa, se obtiene

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

cuando $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ y, de nuevo, se puede mostrar que si se anulara, el sistema dejaría de ser compatible determinado. Para $n = 3$ los cálculos son muy largos y llevan a complicadas expresiones del tipo

$$x_1 = \frac{\text{num}_1}{d}, \qquad x_2 = \frac{\text{num}_2}{d} \qquad \text{y} \qquad x_3 = \frac{\text{num}_3}{d}$$

donde los numeradores num_j son funciones lineales en $\vec{b}$ y en cada una de las columnas de A mientras que el denominador d tiene la apabullante fórmula:

$$(1) \qquad a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Una vez más resulta que la no anulación de este denominador es la condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga solución única.

Definir los determinantes como lo que sale en el denominador al resolver un sistema lineal $n \times n$ genérico, no suena muy práctico, por ello se suelen preferir definiciones abstractas que no recuerdan en nada a la resolución de sistemas. Así lo haremos aquí, para después entrar en la relación con la eliminación de Gauss.

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ definimos su *determinante*, denotado con $|A|$ o con $\det(A)$, como a_{11} si $n = 1$ y de manera recursiva para $n > 1$ como

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1} d_i$$

donde d_i es el determinante de la matriz que resulta al suprimir la primera columna y la i-ésima fila de A.

Para $n = 2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} \det(a_{11}) + (-1)^1 a_{21} \det(a_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

que coincide con el denominador de la solución general en el caso 2×2. Respecto a la notación, para evitar sobrecargarla, tanto al escribir $|A|$ como $\det(A)$ se omiten los paréntesis de la matriz A escrita en términos de sus elementos.

Para $n = 3$ la definición nos dice

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^1 a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^2 a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Si evaluamos estos tres determinantes con lo que sabemos del caso $n = 2$, obtendremos (1).

Los casos $n = 2$ y $n = 3$ son tan comunes que nadie usa esta definición. Seguramente no hay nada nuevo para ti en el siguiente párrafo.

Para $n = 2$, simplemente se memoriza el resultado. La imagen mental es la de un aspa en la que la línea descendente corresponde al producto con signo positivo y la ascendente con el signo negativo:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

En el caso $n = 3$ hay una regla mnemotécnica llamada *regla de Sarrus*. Una de las formas de presentarla se parece al caso $n = 2$, pero requiere tres líneas descendentes y tres ascendentes, bajo la misma regla de signos, que se dibujan sobre la matriz duplicada de la siguiente forma:

$$\left.\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} \cdots - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Otra forma de presentarla consiste en dibujar estas líneas como líneas quebradas en la matriz sin duplicar, lo que da lugar a una especie de estrella de David cruzada por una diagonal tanto para los términos positivos como para los negativos.

Por ejemplo, con la definición recursiva calcularíamos:

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 5\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 5\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 2(-7) - 1(15) + 0 = -29$$

y con la regla de Sarrus

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 5\end{vmatrix} = 2(-1)\cdot 5 + 3\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 2 - 0(-1)\cdot 0 - 2\cdot 1\cdot 2 - 5\cdot 1\cdot 3 = -29.$$

La fórmula de la definición tampoco se suele usar “del todo” para $n > 3$. Esto se debe a que la cantidad de cálculos enseguida se vuelve inmensa. Por ejemplo, para matrices 5×5 genéricas el determinante está compuesto por 120 sumandos y para $n = 60$ este número es comparable al estimado de partículas en el universo observable.

Cuando los paquetes matemáticos implementados en ordenadores calculan determinantes grandes, lo que utiliza es que son hasta cierto punto invariantes por eliminación de Gauss y que calcular determinantes de una matriz escalonada es extremadamente sencillo. Todo lo que hay que saber está en el siguiente resultado:

> *Para cualquier matriz de $\mathcal{M}_n(K)$:*
>
> a) *Si se suma a una fila un múltiplo de otra, el determinante no varía.*
>
> b) *Si se multiplica una fila por una constante, el determinante se multiplica por dicha constante.*
>
> c) *Si se intercambian dos filas, el determinante cambia de signo.*
>
> *Además, si la matriz es escalonada su determinante es el producto de los elementos de la diagonal.*

Por si no estuviera claro, la *diagonal* son los elementos a_{ii}. A veces se le llama diagonal principal para distinguirla de la otra diagonal geométrica que tiene poco interés.

Antes de ver ejemplos numéricos, extraigamos una consecuencia teórica que seguramente te suene.

Sabemos que una matriz cuadrada $n \times n$ es invertible si y solo si el rango es n, lo que equivale a que en la diagonal de la forma escalonada haya pivotes. Según a), b) y c) las transformaciones elementales no cambian la anulación o no del determinante. Por otro lado, que el rango sea n equivale a que los n vectores formados por sus columnas sean linealmente independientes (porque el sistema solo tendría la solución trivial). Uniendo todas estas piezas, se tiene que para $A \in \mathcal{M}_n(K)$

$$|A| \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rg}(A) = n \;\Leftrightarrow\; A \text{ invertible} \;\Leftrightarrow\; \text{columnas linealmente independientes.}$$

Por tanto, el determinante resuelve varios problemas que hemos tratado hasta ahora. La mala noticia es que solo se aplica a matrices cuadradas.

Como ejemplo del uso de eliminación de Gauss en un determinante 3×3, consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 22 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Un posible cálculo de $|A|$ con las transformaciones elementales es:

$$|A| \underset{f_1 \mapsto f_1/2}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 22 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 + f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - f_1}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 + f_2/7}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 24 \\ 0 & 0 & 3/7 \end{vmatrix} = 6.$$

Si hubiéramos comenzado intercambiando la primera y la tercera fila para tener un 1 como pivote, otra posibilidad sería:

$$|A| \underset{f_1 \leftrightarrow f_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 22 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 + f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 2f_1}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 - f_2/3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 21 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

Los resultados coinciden aunque las cuentas intermedias no se parezcan en absoluto.

Además de esta suerte de invariancia por eliminación de Gauss, los determinates tienen dos propiedades que son bastante sorprendentes con nuestra definición. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ entonces siempre se cumple

$$|A| = |A^t| \qquad \text{y} \qquad |AB| = |A||B|.$$

Si pensamos en eliminación de Gauss, parece milagroso que A y A^t tengan el mismo determinante, porque las cuentas para resolver los sistemas asociados no se parecen en nada. Una consecuencia inmediata es que *todo lo que hemos dicho relativo a determinantes con filas, se puede decir con columnas*. También es llamativo que exista una relación tan limpia para el determinante de un producto. No entraremos aquí en las pruebas. No son fáciles, pero sí comprensibles si tu gusto a las matemáticas te lleva a buscarlas en la bibliografía.

La propiedad del producto asegura que por mucho que multipliquemos por sí misma una matriz de determinante 1 el determinante seguirá siendo 1, aunque los elementos se hagan gigantescos. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = A^2 = \begin{pmatrix} 104 & 75 \\ 165 & 119 \end{pmatrix}, \qquad AB = A^3 = \begin{pmatrix} 1553 & 1120 \\ 2464 & 1777 \end{pmatrix}.$$

Como $|A| = 1$, sin hacer las cuentas $|B| = |AB| = 1$.

En la práctica, en el cáculo a mano de determinantes un poco grandes se suele emplear combinaciones de eliminación de Gauss con el desarrollo por la primera fila o columna (u otra fila o columna que imaginemos llevada al primer lugar).

Aquí va un ejemplo (hay muchas formas de proceder):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - 2f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 3f_1 \\ f_4 \mapsto f_4 - 4f_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{des. } c_1 \\ f_2 \mapsto -f_2/2 \\ f_3 \mapsto -f_3/5}}{=} (-2)(-5) \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

donde "des. c_1" indica el desarrollo por la primera columna,

$$(-2)(-5) \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{f_1 \mapsto f_1 + f_2}{=} 10 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{des. } f_1}{=} -10 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -20.$$

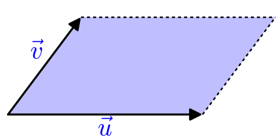
Obviamente, "des. f_1" indica el desarrollo por la primera fila.

2. Interpretación geométrica

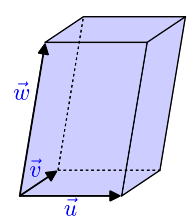
Los determinantes para vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, tienen una interpretación geométrica sencilla. Dan, salvo el signo, el área del paralelogramo $\mathcal{P}_2$ y el volumen del paralelepípedo $\mathcal{P}_3$ determinados por sus columnas. En fórmulas:

$$\text{Área}(\mathcal{P}_2) = \big|\det(\vec{u}|\vec{v})\big|, \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{y} \qquad \text{Volumen}(\mathcal{P}_3) = \big|\det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})\big|, \quad \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3.$$

donde las barras exteriores indican el *valor absoluto*, el resultado con signo positivo. ¿Y qué son el "paralelogramo y el paralelepípedo generados por sus columnas"? Los siguientes dibujos deberían bastar:



Paralelogramo $\mathcal{P}_2$



Paralelepípedo $\mathcal{P}_3$

Por ejemplo, los vectores $\vec{u} = (2, 2, 1)^t$, $\vec{v} = (2, -1, -2)^t$ y $\vec{w} = (1, -2, 2)^t$, determinan un paralelepípedo de volumen

$$\left|\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}\right| = \left| 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \right| = |-27| = 27.$$

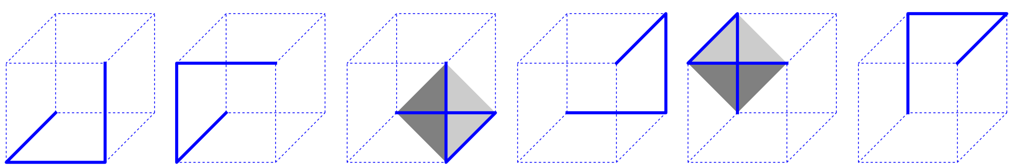
Aunque sea un ejercicio de visualización imposible, en realidad este paralelepípedo es un cubo de lado 3, por ello el volumen ha resultado $3^3 = 27$.

Vectores muy grandes pueden determinan áreas o volúmenes pequeños. Por ejemplo, el área del paralelogramo asociado a $(2024, 111)^t$, $(1167, 64)^t$ tiene área 1 porque $2024\cdot 64 - 111\cdot 1167 = -1$.

Dos vectores en $\mathbb{R}^2$ también determinan un triángulo T uniendo sus extremos y tres vectores en $\mathbb{R}^3$ determinan un *tetraedro* (una pirámide triangular) porque sus extremos son los vértices de una cara triangular. Las fórmulas correspondientes son

$$\text{Área}(T) = \frac{1}{2}\big|\det(\vec{u}|\vec{v})\big|, \quad \vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^2 \qquad \text{y} \qquad \text{Volumen}(\mathcal{T}) = \frac{1}{6}\big|\det(\vec{u}|\vec{v}|\vec{w})\big|, \quad \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3.$$

La primera fórmula es bastante obvia porque un triángulo es la mitad de un paralelogramo. La segunda se basa en una descomposición de cualquier paralelepípedo en seis tetraedros del mismo volumen. Este es un buen reto para nuestra visión en tres dimensiones. Si buscas la descomposición en la bibliografía o en internet notarás que no es tan fácil hacerse a la idea. Con argumentos elementales uno puede limitarse al cubo, aun así es complicado visualizarlo. Aquí va un intento un poco original. Se han marcado con mayor grosor tres aristas de cada una de los tetraedros. En el tercer y quinto casos se señalan también las caras visibles del tetraedro. ¿Te crees que los seis tetraedros son iguales salvo giros y simetrías y por tanto tienen el mismo volumen?



Las tres aristas forman todos los caminos de un vértice al opuesto utilizando solo una vez cada una de las tres direcciones de los ejes.

Dos puntos P y Q determinan un vector $\overrightarrow{PQ}$, concretamente el que resulta al efectuar la resta $Q - P$ coordenada a coordenada (escribiendo el resultado en columna, por las manías de este curso). Así sabremos calcular áreas de triángulos o volúmenes de tetraedros si nos dan sus vértices.

Por ejemplo, el área del triángulo de vértices $A = (1,2)$, $B = (11,26)$, $C = (3,7)$ es 1 porque

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}11\\26\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\24\end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix}10 & 2\\24 & 5\end{vmatrix} = 2.$$

El tetraedro de vértices

$$(0,0,0), \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

es el mismo que el generado por los vectores correspondientes a los tres últimos puntos colocados en columna, digamos $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Aunque todavía no lo hemos repasado, seguro que sabes hallar la longitud de un vector. Si te tomas el trabajo de calcular las longitudes de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{w}$ y $\vec{v}-\vec{w}$, verás que todas son 1, por tanto es un tetraedro regular. Su volumen es

$$\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \end{vmatrix}\right\| = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Multiplicando cada vector por un número, el volumen, como es lógico, se multiplicará por dicho número al cubo. Con ello deducimos que el volumen del tetraedro regular de arista a responde a la fórmula $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, un resultado que pocos saben de memoria.

Consideremos una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $n = 2, 3$ dada por $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, en la base canónica. El determinante de A indica por cuánto se multiplica el área o el volumen la aplicación de A, independientemente de la forma del objeto de partida.

Si $A = (\vec{u}|\vec{v})$ para $n = 2$ entonces f aplica el cuadrado unidad, determinado por $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$, en el paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Lo análogo se cumple para $n = 3$ con el paralelepípedo determinado por las columnas de la matriz. En estas situaciones, las fórmulas para el área de $\mathcal{P}_2$ y el volumen de $\mathcal{P}_3$ nos dicen que el determinante de la matriz de un endomorfismo (siempre en la base canónica) es, salvo el signo, el factor por el que multiplica las áreas. Intuitivamente cualquier figura está compuesta por copias a escala infinitesimal del cuadrado o el cubo unidad, por tanto tal interpretación es independiente de la figura de partida. Con ello, la propiedad de que el determinante de un producto sea el producto de determinantes se vuelve intuitiva porque cuando se aplican dos escalas sucesivamente, los factores se multiplican.

Por ejemplo, consideremos el círculo unidad C, con ecuación $x^2 + y^2 \le 1$, y la elipse E de semiejes a y b en su posición habitual: $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$. Tenemos

$$E = f(C) \qquad \text{con} \quad f(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

donde E es la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 \le 1$ y C el círculo unidad $x^2 + y^2 \le 1$. Simplemente multiplicamos en cada uno de los ejes el radio uno de C por a y por b para obtener los semiejes de E. De esta forma se obtiene que el área de la elipse es $\pi \det(A) = \pi ab$.

3. Regla de Cramer, inversa y rango

Con gran probabilidad ya conocerás de bachillerato el uso de los determinantes con los fines indicados en este apartado. Por otra parte, en este curso hemos visto maneras alternativas de resolver los problemas que se plantean sin emplear determinantes.

Comenzamos con la solución de sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados con el mismo número de ecuaciones e incógnitas.

Regla de Cramer. *Sea* $A\vec{x} = \vec{b}$ *con* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *un sistema compatible determinado y sea* A_j *la matriz* A *reemplazando la columna* j*-ésima por* $\vec{b}$*, entonces su solución es*

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

El caso $n = 2$ lleva a

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

que coincide con la fórmula vista al motivar los determinantes.

Aunque la regla de Cramer sea una compacta y elegante, tiene poca utilidad práctica en ejemplos concretos sobre todo cuando la dimensión crece.

Veamos un ejemplo numérico de dimensión 3. Resolvamos el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Tras unos cálculos obtenemos que el determinante de A es 16. Más cálculos muestran

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 10 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 48, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \end{vmatrix} = -32 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 10 \end{vmatrix} = -16.$$

Por tanto la solución es $x = 48/16 = 3$, $y = -32/16 = -2$, $z = -16/16 = -1$.

Para la siguiente aplicación conviene definir el *adjunto* o *cofactor* del elemento a_{ij} de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(K)$ como $A_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$ donde d_{ij} es el determinante de la matriz A cuando se elimina la fila i-ésima y la columna j-ésima. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7,\; A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -20,\; A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nota que la definición inicial de determinante se puede escribir en términos de los A_{i1}.

Cálculo de la matriz inversa. *Sea* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *con* $|A| \neq 0$. *Su matriz inversa es la traspuesta de la matriz formada por los adjuntos dividida por* $|A|$.

Si en el último ejemplo completamos el cálculo del resto de los adjuntos, $A_{13} = -1$, $A_{21} = -7$, $A_{22} = 13$, $A_{23} = 1$, $A_{32} = 1$, $A_{33} = -1$, se deduce del resultado anterior, con el cálculo adicional $|A| = -7$, que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & -20 & -1 \\ -7 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{t} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 \\ 20 & -13 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para detectar posibles errores en tanta cuenta es conveniente calcular el producto AA^{-1}, aunque sea parcialmente, y compararlo con la matriz identidad.

El caso $n = 2$ lleva rápido a la fórmula que conocíamos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

En general, el proceso anterior requiere hallar n^2 determinantes de tamaño $n - 1$ y uno de tamaño n, lo cual se vuelve bastante gravoso en cálculos a mano ya en los casos típicos con $n = 4$.

Para la última aplicación, llamaremos *menor* de tamaño k de una matriz A al determinante de una submatriz cuadrada de A formada por los elementos que están simultáneamente en k filas y k columnas de nuestra elección. Por ejemplo, los números d_{ij} que aparecen en la definición de los adjuntos son menores de tamaño $k - 1$. Con cierto abuso de notación se dice que un menor contiene a otro si viene de una submatriz que contiene a la del segundo.

Cálculo del rango. *Sea* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$. *Se cumple* $\mathrm{rg}(A) = k$ *si y solo si existe un menor de tamaño* k *no nulo y todos los menores de dimensión mayor que lo contienen (si existen) son nulos.*

Por ejemplo, consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

En A el determinante de la submatriz formada por la segunda y cuarta columna y las dos filas es no nulo. Como no hay posibilidad de menores de tamaño mayor, $\mathrm{rg}(A) = 2$. En B está claro que $\det\big((b_{ij})_{i,j=1}^2\big) = 1 \neq 0$ y $|B| = 0$ implica $\mathrm{rg}(B) = 2$. Está claro a simple vista que $\mathrm{rg}(C) = 1$ porque todas las columnas (o las filas) son proporcionales unas a otras. Para proceder con determinantes habría que considerar por ejemplo $c_{11} \neq 0$ y hallar todos los menores de tamaño 2 que lo contienen, cuatro en total, comprobando que se anulan.

Una consecuencia de este procedimiento para calcular el rango y de $\det(M) = \det(M^t)$ es

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^t) \qquad \text{para cualquier } A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K).$$

Esto parece milagroso a primera vista porque las cuentas para hallar las formas escalonadas de A y A^t no tienen nada que ver.

La relación anterior participa en la deducción de la desigualdad:

$$\operatorname{rg}(AB) \le \text{mín}\big(\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\big) \qquad \text{para cualquier } A \in \mathcal{M}_{l\times m}(K),\ B \in \mathcal{M}_{m\times n}(K).$$

Si tienes curiosidad, la explicación de $\operatorname{rg}(AB) \le \operatorname{rg}(A)$ pasa por notar que la imagen de $\vec{x} \mapsto AB\vec{x}$ está obviamente contenida en la de $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ (recuerda que el rango es la dimensión de la imagen). Para obtener $\operatorname{rg}(AB) \le \operatorname{rg}(A)$ se da un rodeo con la traspuesta:

$$\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}\big((AB)^t\big) = \operatorname{rg}(B^tA^t) \le \operatorname{rg}(B^t) = \operatorname{rg}(B).$$

A propósito, no es cierto que se cumpla siempre $\operatorname{rg}(AB) = \text{mín}\big(\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\big)$.