Breve introducción y repaso

Ingeniería Biomédica Curso: Matemáticas I

Fernando Chamizo https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/

1. La notación de los conjuntos

En cierto punto del siglo XX, hubo un movimiento en favor de que las matemáticas y su enseñanza, estuvieran basadas en la noción de *conjunto*. Aunque esta opinión ha perdido fuerza en lo relativo a la educación, cualquier libro básico de matemáticas hace referencia a los conjuntos sin llegar a definirlos. Tampoco lo haremos aquí (no es nada sencillo) y nos limitaremos a la idea vaga de que un conjunto es una colección de cosas que decimos que son sus *elementos*.

Si indicamos un conjunto exhibiendo sus elementos, los encerramos entre llaves. Así $A = \{1, 2, 7\}$ quiere decir el conjunto formado por los elementos 1, 2 y 7. Para indicar que algo es elemento de un conjunto, se usan "$\in$", que se lee *pertenece*. A veces se especifican los elementos por una propiedad y para ello es útil el símbolo ":"con el significado de *tal que*. Por ejemplo,

$$\clubsuit \in \{0, 1, \clubsuit, \heartsuit\}, \qquad 103 \in \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es número primo}\}.$$

Aquí $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, que recordaremos en breve.

Con $A \subset B$ se indica que A está incluido en B (se admite también que sean iguales) y con $A \supset B$ que A incluye a B. De este modo,

$$\{\text{seres humanos}\} \subset \{\text{vertebrados}\}, \qquad \{\text{bípedos sin plumas}\} \supset \{\text{seres humanos}\}$$

y. según la leyenda, Platón afirmó la igualdad entre los dos últimos conjuntos.

Las operaciones más básicas entre dos conjuntos A y B son la *intersección* y la *unión*, definidas como

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\} \qquad \text{y} \qquad A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

En la segunda fórmula el "o" no es exclusivo, puede estar en ambos conjuntos. Para que $A \cap B$ dé siempre un conjunto, se introduce el *conjunto vacío* $\emptyset$, el que no contiene elementos. Por ejemplo, $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = 2\} = \emptyset$. Otra operación común es $A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$.

Dos símbolos de lógica matemática que aparecen a menudo en combinación con los conjuntos son $\forall$ y $\exists$, que significan "para todo" y "existe". La negación del segundo, la no existencia, se indica con $\nexists$. Por otro lado, uno de los conectores lógicos más importantes en matemáticas es $\Rightarrow$, que indica la implicación. En general, en este curso vamos a intentar minimizar el uso de estos símbolos sustituyéndolos por palabras. Solo para practicar, una manera barroca de escribir $A \subset B$, que solo haría gracia a un matemático, es "$x \in A \Rightarrow x \in B$". También podríamos decir "$x \in B$ se cumple $\forall x \in A$".

Con $f : A \longrightarrow B$ se representa una *función* del conjunto A al conjunto B, una manera de asignar a un elemento $x \in A$ otro $y \in B$, lo cual se expresa como $f(x) = y$. Podemos imaginar las funciones como algoritmos deterministas: con una misma una entrada siempre obtenemos la misma salida.

2. Conjuntos de números

Ya conoces los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, los *números enteros*, que añaden los negativos y el cero, $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$, los *racionales* $\mathbb{Q} = \{\text{fracciones}\}$ y los *reales* $\mathbb{R}$, que imaginamos como puntos de una línea. En principio también deberías conocer los *complejos* $\mathbb{C}$, que seguramente te parecerán algo raro que "no existe".

Aunque históricamente las cosas sean más complicadas, se pueden entender $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ como extensiones de $\mathbb{N}$ que solventan el problema de que no podamos efectuar algunas de las operaciones elementales.

	$+$	$-$	$\times$	$\div$
$\mathbb{N}$	Sí	No	Sí	No
$\mathbb{Z}$	Sí	Sí	Sí	No
$\mathbb{Q}$	Sí	Sí	Sí	Sí*

(*) Salvo por cero

En principio $\mathbb{R}$ parece innecesario porque podemos hacer las mismas operaciones elementales que en $\mathbb{Q}$, pero ya los antiguos griegos descubrieron que en algunas de sus construcciones geométricas aparecían longitudes que no eran racionales, por ejemplo la diagonal de un cuadrado de lado 1.

Dentro de la teoría actual, intuitivamente los reales completan los "huecos" que quedan entre los racionales y esto está relacionado con tomar límites.

Sin entrar en las complicaciones de la teoría, seguramente sepas que al dividir una fracción se obtienen cifras decimales que se acaban o que se repiten indefinidamente. Por ejemplo:

$$\frac{1}{8} = 0{,}125, \qquad \frac{7}{11} = 0{,}545454\dots, \qquad \frac{2}{7} = 0{,}285714285714\dots$$

Sin embargo, te puedes imaginar un número decimal que ni se acaba ni se repite, por ejemplo

$$\alpha = 0{,}101001000100001\dots$$

Este número está entre 0,1 y 0,2, que son racionales, y también entre 0,101001 y 0,101002, que siguen siéndolo. Podemos imaginar infinidad de pares de números racionales por debajo y por encima de α, pero nunca lo alcanzarán. De alguna manera, los racionales dejan "huecos" y α está en uno de ellos.

Representar los números reales geométricamente como los puntos de una recta horizontal, les da una ordenación natural (más grande cuanto más a la derecha) y permite establecer *desigualdades*, esto es relaciones por medio de los símbolos, $<$, $>$, $\le$ o $\ge$ que significan, respectivamente, menor, mayor, menor o igual y mayor o igual.

Con esta imagen geométrica, la distancia entre dos puntos $a, b \in \mathbb{R}$ es $|a-b|$ donde las barras representan el *valor absoluto*:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Esto es, $|x|$ coincide con x olvidando el signo.

Una vez que hemos completado con $\mathbb{R}$ todos los huecos de $\mathbb{Q}$, parece que no es necesario inventar más números. Sin embargo en bachillerato te hablaron de los *números complejos*, $\mathbb{C}$, una extensión de $\mathbb{R}$ que constituye un choque frontal con la abstracción. Históricamente nacieron de la necesidad de resolver ecuaciones algebraicas (hallar raíces de polinomios). Seguramente tienes la sensación de que el resto de los conjuntos de números existen y estos no. En cierto modo, todas las construcciones matemáticas son artificiales. Más allá de las discusiones filosóficas sobre su existencia en el mundo real, el caso es que son <u>muy importantes</u> en ingeniería y es totalmente necesario que sepas trabajar con números complejos.

La forma habitual de introducir $\mathbb{C}$ es como el conjunto $\{x+iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ donde i es "algo" que cumple $i^2 = -1$.

Dado un número complejo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se dice que x es su *parte real* y que y es su *parte imaginaria*. A veces se denotan con $\Re(z)$ o $\mathrm{Re}(z)$ y con $\Im(z)$ o $\mathrm{Im}(z)$. Asociado a un número complejo z está su *conjugado* $\overline{z}$ que se obtiene cambiado la parte imaginaria de signo. Esto es, si $z = x + iy$, siempre con $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple $\overline{z} = x - iy$. El conjugado respeta las operaciones elementales, que repasaremos a continuación, es decir, $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ y $\overline{z_1/z_2} = \overline{z}_1/\overline{z}_2$.

Aunque utilices calculadoras u ordenadores para hacer cuentas, es importante que conozcas la mecánica de las operaciones elementales en $\mathbb{C}$. Esencialmente lo que tienes que saber es:

- Sumas y restas $\to$ triviales.
- Multiplicación $\to$ emplear $i^2 = -1$.
- División $\to$ multiplicar por el conjugado del denominador.

Respecto al último punto, observa que para $z = x + iy$ se tiene $z \cdot \overline{z} = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$. El método para hacer divisiones se basa en que con la multiplicación por el conjugado se consigue que el denominador pase a ser real.

Por ejemplo, si $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 3 - i$, no cuesta nada calcular $z_1 + z_2 = 4 + i$ y $z_1 - z_2 = -2 + 3i$. Para la multiplicación se operan de la forma habitual los paréntesis: $z_1z_2 = 3 - i + 6i - 2i^2 = 5 + 5i$, donde se ha usado $i^2 = -1$. La división, hecha muy despacio, sería:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{3-i} = \frac{(3+i)(1+2i)}{3^2+1^2} = \frac{3+6i+i+2i^2}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

Mucho tiempo después de que se introdujeran los números complejos, se llego a la idea de que era conveniente asociarlos a puntos del plano. El número complejo $z = x + iy$ corresponde a (x, y). Por el teorema de Pitágoras, el segmento que lo une con el origen mide $\sqrt{x^2 + y^2}$, la raíz cuadrada del producto $z\overline{z}$ que usamos en la división. Esta longitud es lo que se llama *módulo* o *valor absoluto* del número complejo z y se indica con $|z|$. Extiende al valor absoluto en $\mathbb{R}$, de ahí la notación.

3. Matrices y vectores

Una *matriz* $m \times n$ es solo una tabla de números con m filas y n columnas (altura $\times$ base). Denotaremos con $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices reales $m \times n$. Si uno permite números complejos, escribiremos $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $\mathcal{M}_{m\times n}$ si no tenemos interés en distinguir los dos casos. Las *matrices cuadradas*, con $m = n$, son más importantes que el resto y se suele abreviar $m \times n$ por m en la notación. Por ejemplo $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ son las matrices reales 2×2. Se tiene $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ porque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, lo números reales se pueden considerar complejos con parte imaginaria nula.

Las matrices se suelen denotar con letras mayúsculas y sus *elementos*, los números que la integran, con la letra minúscula correspondiente, indicando con subíndices la fila y la columna, en este orden. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad a_{12} = 3, \quad a_{22} = 11, \quad a_{23} = 13.$$

Muchas veces se escribe $A = (a_{ij})$, o $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2,3}$ si se quiere indicar el número de filas y columnas.

La matriz que tiene todos sus elementos cero se conoce como *matriz nula* y a veces se denota con O. Entre las matrices cuadradas destacan las *diagonales* cuyo nombre se explica por sí solo: son las matrices D con $d_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. Si además $d_{ii} = 1$ para cada i, se dice que tenemos la *matriz identidad*, denotada por I (o por I_n si se quiere indicar su tamaño).

Una operación importante sobre las matrices que a este nivel parecerá arbitraria es la *trasposición* que consiste en intercambiar filas y columnas. De esta forma, convierte matrices de $\mathcal{M}_{m\times n}$ en matrices de $\mathcal{M}_{n\times m}$. Se suele indicar con el superíndice t. Extendiendo la notación de números complejos, $\overline{A}$ indica conjugar todos los elementos de la matriz A. Un par de ejemplos son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^t = \overline{A}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad B^t = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}, \ \overline{B}^t = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}.$$

La suma de dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se lleva a cabo de la manera natural sumando elemento a elemento. Lo mismo ocurre con la resta. La multiplicación de dos matrices solo se define si el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda. Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times l}$ entonces $AB \in \mathcal{M}_{m\times l}$. El elemento ij del producto se calcula con la fórmula $\sum_k a_{ik}b_{kj}$. Esto equivale a decir que se hace una operación como la del producto escalar habitual de la fila i de A por la columna j de B y el resultado da lugar al elemento ij. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Te preguntarás cómo a alguien en su sano juicio se le puede ocurrir que esta es una manera sensata de multiplicar tablas. Hay una indicación acerca de ello al final de este apartado.

En relación con la suma y el producto, la trasposición cumple

$$(A+B)^t = A^t + B^t, \qquad \text{y} \qquad (AB)^t = B^t A^t.$$

El cambio de orden en la segunda fórmula no es ninguna tontería porque si por ejemplo $A, B \in \mathcal{M}_n$ es muy inusual que AB y BA coincidan, en caso de que lo hagan se dice que *conmutan*. Por si te suena la terminología, para $n > 1$ el producto en $\mathcal{M}_n$ no tiene la *propiedad conmutativa*, pero sí la *propiedad asociativa*. Esto último significa que $A(BC)$ y $(AB)C$ dan lo mismo.

Dicho sea de paso, las matrices O e I son claramente elementos neutros de la suma y de la multiplicación de matrices cuadradas. Es decir, $A + O = O + A = A$ y $AI = IA = A$.

Hasta ahora para ti un *vector* era una lista ordenada de dos o tres números, sus *coordenadas*. En este curso los vectores serán algo más general, así un polinomio o una señal los consideraremos más adelante como vectores en un espacio adecuado. Antes de meternos en esas finuras, es importante que pienses que los vectores de toda la vida, los que conoces, pueden tener más de tres coordenadas si se trabaja en un espacio de más dimensiones. Entonces representamos un vector de los de siempre por una lista de n números y en este curso es conveniente que estos números estén escritos en vertical, es decir, como una matriz $n \times 1$, lo cual es un fastidio al escribir un libro o unos apuntes porque las líneas van en horizontal. Un truco que usaré cuando sea necesario es el símbolo de trasposición. El conjunto de todos los vectores formados por n coordenadas se denomina $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, dependiendo de si queremos considerar números reales o complejos. Como ya sabes, habitualmente se indica que algo es un vector escribiendo una flecha sobre su nombre. Así son ejemplos de vectores de toda la vida

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = (2,3,5,7)^t \in \mathbb{R}^4 \quad \text{y} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \\ 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^5.$$

El vector con todas sus coordenadas cero, llamado *vector nulo*, se suele indicar mediante el símbolo $\vec{0}$.

La manía tan rara de que los vectores ahora estén en vertical proviene de que será conveniente multiplicar matrices por vectores y que resulte otro vector. Concretamente, si consideramos un vector $\vec{v}$ como una matrix $n \times 1$ entonces para $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se tendrá $A\vec{v} \in \mathcal{M}_{m\times 1}$, es decir, es un vector de m coordenadas. El nuevo vector depende del original de una forma conceptualmente sencilla, que más adelante llamaremos *lineal.* Cada nueva coordenada viene dada por una suma de las antiguas con diferentes coeficientes que indican cuánto participan en el resultado.

La razón de ser de las matrices es que funcionan como "máquinas" que pasan vectores a vectores (en rigor, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ actúa como una función $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$) y que respetan ciertas propiedades. Si aceptamos esta manera de entender las matrices, tendremos una explicación acerca de la extraña definición de su multiplicación. Al aplicar la máquina B sobre $\vec{v}$ y después la máquina A al resultado, obtendremos $A(B\vec{v})$. Si queremos que esto sea la máquina AB aplicada a $\vec{v}$, no hay más remedio que definir este producto de la extraña forma habitual.

Por otro lado, los vectores sirven para representar magnitudes, como las fuerzas en física, en las que no solo es importante el tamaño o intensidad sino también la dirección, aunque tienen otras aplicaciones en las que esta motivación es menos obvia, por ejemplo a los gráficos realistas generados por ordenador (CGI) o al tratamiento de señales. La introducción de los vectores es relativamente tardía en la historia de las matemáticas, del siglo XIX. De hecho, la teoría matemática que los involucra, llamada *álgebra lineal* (para ti un sinónimo de Matemáticas I), a mediados del siglo XX todavía no se impartía en todas las universidades, mientras que ahora forma parte de cualquier plan de estudios científico.