Ejercicios 6, 7 y 8 de la hoja 2

6) Una matriz simétrica genérica es del tipo $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$.

Hay 6 parámetros. La condición de que la suma de las columnas sea $\vec{0}$ se traduce en

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_5 + x_6 = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones definen el subespacio

Su matriz ya está escalonada

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$x_4 = \lambda_1,\ x_5 = \lambda_2,\ x_6 = \lambda_3$ (no pivotes)

$\Rightarrow x_3 = -\lambda_3 - \lambda_2,\ x_2 = -\lambda_1 - \lambda_2 \quad x_1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3$

Así pues, todas las matrices que pertenecen al subespacio vienen determinadas unívocamente por los parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ por

$$A = \lambda_1 \underset{M_1}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}} + \lambda_2 \underset{M_2}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}} + \lambda_3 \underset{M_3}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Una base ~~sería~~ es $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3\}$.

[Los M_j son los $\vec{v}_j$ del resultado que vimos en clase sobre sistemas homogéneos.]

7) Aquí van dos soluciones para el cálculo de la base:

Sol. rápida, pero ingeniosa: $x+i$ divide a $P \in \mathbb{C}_3[x] \iff P = (x+i)Q$ con $Q \in \mathbb{C}_2[x]$

Como $\{1, x, x^2\}$ es base de $\mathbb{C}_2[x]$, $\mathcal{B} = \{(x+i), (x+i)x, (x+i)x^2\}$ lo es de V.

Sol. lenta, algo más mecánica: $P \in \mathbb{C}_3[x] \iff P = a + bx + cx^2 + dx^3$. O bien por la regla de Ruffini o haciendo la división larga, se tiene que $x+i$ divide a P si y solo si $a + b(-i) + c(-i)^2 + d(-i)^3 = 0$.

La "matriz" de este "sistema" con una sola ecuación es $(1 \ \ -i \ \ -1 \ \ i)$.

La columna pivote es la primera, así que tomamos $b=\lambda_1$, $c=\lambda_2$, $d=\lambda_3$ y despejamos $a=\lambda_1 i+\lambda_2-i\lambda_3$. De este modo,

$$P=\lambda_1(i+x)+\lambda_2(1+x^2)+\lambda_3(-i+x^3)$$

y $\mathcal{B}'=\{i+x, 1+x^2, -i+x^3\}$ es base.

Las coordenadas dependen de la base escogida. Uso $\mathcal{B}$. Llamando x_1, x_2, x_3 a las coordenadas,

$$x^3+(1+3i)x^2+2(i-1)x-1 = x_1(x+i)+x_2(x^2+ix)+x_3(x^3+ix^2),$$

que implica, igualando coeficientes

$$\left.\begin{array}{l} ix_1=-1 \\ x_1+ix_2=2(i-1) \\ x_2+ix_3=1+3i \\ x_3=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & 0 & -1 \\ 1 & i & 0 & 2i-2 \\ 0 & 1 & i & 1+3i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 & i-2 \\ 0 & 1 & i & 1+3i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 & i-2 \\ 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & 0 & i-2 \\ 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to x_1=i \\ \to x_2=1+2i \\ \to x_3=1 \end{array}$$

[En realidad, a ojo se resuelve más rápido que por Gauss]

8) Pertenecen al subespacio porque $f_1''+9f_1=-9\operatorname{sen}(3x)+9\operatorname{sen}(3x)=0$ y $f_2''+9f_2=-9\cos(3x)+9\cos(3x)=0$.

Son l.i. porque el seno y el coseno no son proporcionales. Otra manera de verlo es que $\lambda_1\operatorname{sen}(3x)+\lambda_2\cos(3x)=0$ tomando $x=0$ da $\lambda_2=0$ y tomando $x=\frac{\pi}{2}$ da $\lambda_1=0$.

Buscamos $f=\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ que cumpla
$$5=f\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=\lambda_1\frac{1}{\sqrt{2}}-\lambda_2\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$9=f'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=-\frac{3\lambda_1}{\sqrt{2}}-\frac{3\lambda_2}{\sqrt{2}}$$

Entonces basta resolver $\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=5\sqrt{2}\\ \lambda_1+\lambda_2=-3\sqrt{2}\end{cases}$

Sumando y restando se sigue $\lambda_1=\sqrt{2}$ y $\lambda_2=-4\sqrt{2}$.

Por tanto, la solución buscada es $f(x)=\sqrt{2}\operatorname{sen}(3x)-4\sqrt{2}\cos(3x)$.