Ejercicio 12 de la hoja 2

Si uno sigue la mecánica habitual de otros ejercicios y ejemplos, uno tomaría bases de $\mathcal{M}_2$ y $\mathcal{M}_3$ y trabajaría con la matriz de f. Las bases escogidas dan igual. Las más naturales son:

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La matriz resultante es 9×4 y por tanto un poco aparatosa (aunque está llena de ceros y las cuentas no son complicadas.

Aquí va una alternativa de solución sin usar la matriz de f:

$A \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(A) = \mathcal{O}$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1+x_2 & 2x_2 & x_2 \\ x_3+x_4 & 2x_4 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+x_3+x_4 & 2(x_2+x_4) & x_2+x_4 \\ 2(x_3+x_4) & 4x_4 & 2x_4 \\ x_3+x_4 & 2x_4 & x_4 \end{pmatrix}$$

Es muy fácil ver que al igualar esto a $\mathcal{O}$ sale $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.
Por tanto $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, lo que implica que f es inyectiva.
Por las fórmulas para la dimensión $\dim \mathrm{Ker}(f) = 0 \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = 4$

$\Rightarrow f$ no es sobreyectiva porque $\mathrm{Im}(f) = \mathcal{M}_3$ implicaría $\dim \mathrm{Im}(f) = 9$.

Por el cálculo anterior,

$$f(A) = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas 4 matrices son una base de $\mathrm{Im}(f)$, porque con el arguemento para obtener $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ sabemos que son l.i.