Problema 1.7

La fórmula decía $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$.

Aplicada a la matriz A del enunciado que tiene $\alpha=\delta=\frac{a+a^{-1}}{2}$, $\beta=\gamma=\frac{a-a^{-1}}{2}$, se sigue

$$A^{-1}=\frac{1}{\left(\frac{a+a^{-1}}{2}\right)^2-\left(\frac{a-a^{-1}}{2}\right)^2}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+a^{-1} & a^{-1}-a \\ a^{-1}-a & a+a^{-1} \end{pmatrix}$$

Como $(a+a^{-1})^2-(a-a^{-1})^2=a^2+2+a^{-2}-(a^2-2+a^{-2})=4$, resulta

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+a^{-1} & a^{-1}-a \\ a^{-1}-a & a+a^{-1} \end{pmatrix}$$

Ahora lo hacemos con Gauss-Jordan; partiendo de $(A|I)$ para llegar a $(I|A^{-1})$. Para que no haya fracciones desde el principio, multiplicamos cada fila por 2:

$$(A|I)\xrightarrow[\substack{f_1\mapsto 2f_1\\ f_2\mapsto 2f_2}]{}\left(\begin{array}{cc|cc} a+a^{-1} & a-a^{-1} & 2 & 0 \\ a-a^{-1} & a+a^{-1} & 0 & 2 \end{array}\right)\xrightarrow[f_2\mapsto (a+a^{-1})f_2-(a-a^{-1})f_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc} a+a^{-1} & a-a^{-1} & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2(a^{-1}-a) & 2(a^{-1}+a) \end{array}\right)$$

De nuevo se ha usado $(a+a^{-1})^2-(a-a^{-1})^2=4$. Ahora hacemos que los pivotes sean 1 y que aparezcan ceros encima de ellos

$$\xrightarrow[\substack{f_1\mapsto \frac{f_1}{a+a^{-1}}\\ f_2\mapsto \frac{f_2}{4}}]{}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}} & \frac{2}{a+a^{-1}} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{a^{-1}-a}{2} & \frac{a+a^{-1}}{2} \end{array}\right)\xrightarrow[f_1\mapsto f_1+\frac{a^{-1}-a}{a+a^{-1}}f_2]{}\left(\begin{array}{c|cc} I & \frac{a+a^{-1}}{2} & \frac{a^{-1}-a}{2} \\ & \frac{a^{-1}-a}{2} & \frac{a+a^{-1}}{2} \end{array}\right)$$

La única cuenta no trivial en el último paso es:

$$\frac{2}{a+a^{-1}}+\frac{a^{-1}-a}{a+a^{-1}}\cdot\frac{a^{-1}-a}{2}=\frac{4+(a^{-1}-a)^2}{2(a+a^{-1})}=\frac{4+a^{-2}-2+a^2}{2(a+a^{-1})}=\frac{a^2+2+a^{-2}}{2(a+a^{-1})}=\frac{(a+a^{-1})^2}{2(a+a^{-1})}=\frac{a+a^{-1}}{2}.$$

Problema 1.10

Si $I+xA+yA^2$ es la inversa de $I+2A$, se debe cumplir

$$(I+2A)(I+xA+yA^2)=I.$$

porque $A^3=0$

Operando $I+xA+yA^2+2A+2xA^2+\cancel{2yA^3}=I.$

Entonces $(x+2)A+(2x+y)A^2=O$ que podemos conseguir

con $\left.\begin{array}{l} x+2=0 \\ 2x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-2,\ y=4.$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cumple $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A^3=O.$

La inversa de $I+2A$ es por Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & I \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \mapsto f_2-2f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 \mapsto f_1-2f_2]{} \left(I \,\middle|\, \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{(I+2A)^{-1}} \right)$$

que coincide con $I-2A+4A^2.$