Hoja 8

Matemáticas I. Grado en Ingeniería biomédica

Los problemas que empiezan por 🌈 me parecen demasiado difíciles para un examen, pero interesantes.

1. Encuentra el rango de estas matrices. En algunos casos dependerá de los parámetros. Encuentra una base de su núcleo.

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   (c)
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (d)
   $$\begin{pmatrix} 0 & -\lambda - 1 & \lambda + 1 \\ \lambda - 1 & \lambda + 1 & -\lambda + 1 \\ 2 * \lambda + 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (e)
   $$\begin{pmatrix} a - 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ -1 & 0 & a + 1 \end{pmatrix}$$

   (f) 🌈
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   (Saldrán ecuaciones que dicen cuándo la matriz tiene rango 0, 1 o 2)

2. ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta. A y B son matrices cualesquiera.

   (a) $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A^t)$.

   (b) Si A^{-1} existe, $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A^{-1})$.

   (c) Si el rango de A es el máximo posible (si A es $m \times n$, el menor entre m y n), entonces el sistema $Ax = b$ es compatible para cualquiera b.

   (d) Lo mismo, pero sólo si A tiene al menos tantas columnas como filas.

   (e) Si A es el producto de una columna $m \times 1$ por una fila $1 \times n$, entonces el rango de A es ≤ 1.

   (f) 🌈 Si el rango de A es ≤ 1, A es el producto de una columna $m \times 1$ por una fila $1 \times n$.

   (g) $\operatorname{rk}(BA) \leq \operatorname{rk} A$. Pista: piensa en las filas de A y en las de AB.

   (h) Si B es invertible, $\operatorname{rk}(BA) = \operatorname{rk}(A)$.

   (i) Si A tiene tamaño $m \times n$ y $\operatorname{rk}(A) = m$, entonces $n \geq m$.

   (j) Si A tiene tamaño $m \times n$ y $\operatorname{rk}(A) = m$, entonces $n \leq m$.

   (k) Si A tiene tamaño $m \times n$ y $\operatorname{rk}(A) = m$, entonces las columnas de A son independientes.

   (l) Si A tiene tamaño $m \times n$ y $\operatorname{rk}(A) = m$, entonces las filas de A son independientes.

   (m) Si A contiene un menor 3×3 cuyo determinante no es 0, entonces $\operatorname{rk}(A) = 3$.

   (n) $\operatorname{rk}(A + B) = \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B)$

3. Si v_1, v_2, v_3, v_4 son vectores de un espacio vectorial que generan un espacio de dimensión 3, ¿puede ser que la dimensión de $\langle v_1, v_2, v_2 \rangle$ sea 3? ¿Y 2? ¿Y 1? ¿Y 0? ¿Y 4?

4. Se ha roto la pantalla del móvil y no veo la mitad de esta matriz:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & ⚡ & ⚡ \\ 5 & -3 & ⚡ & ⚡ \\ 2 & 7 & ⚡ & ⚡ \\ 1 & -1 & ⚡ & ⚡ \end{pmatrix}$$

En la tienda de reparación de móviles me dicen que no pueden recuperar mi matriz, pero han encontrado su forma escalonada reducida (por filas):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuál era la matriz?