Hoja 6

Matemáticas I. Grado en Ingeniería biomédica

Los problemas que empiezan por 🌈 me parecen demasiado difíciles para un examen, pero interesantes.

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son bases del espacio correspondiente? (Más vale que los vectores estén en el espacio, no pueden ser una base)
   (a) $\{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ en $\mathbb{R}^2$.
   (b) $\{(1,2),(2,4)\}$ en $\mathbb{R}^2$.
   (c) $\{(1,3,4),(0,6,7),(2,0,1)\}$ en $\mathbb{R}^3$.
   (d) $\{(1,0,0,0,-1),\ (0,1,0,0,-1),\ (0,0,1,-1,0)\}$ en el núcleo de $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.
   (e) $\{(1,0,0,0,-1),\ (0,1,0,0,-1),\ (0,0,1,-1,0)\}$ en el núcleo de $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
   (f) $\{(1,0,0,0,-1),\ (0,1,0,0,-1),\ (0,0,1,-1,0)\}$ en el núcleo de $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
   (g) $\{\operatorname{sen}(x+1),\cos(x+1)\}$ en $\langle \operatorname{sen}(x),\cos(x)\rangle$.

2. Encuentra una base de los siguientes espacios.
   (a) El núcleo de $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 6 & 2\end{pmatrix}$.
   (b) El núcleo de $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$.
   (c) $\langle(1,3,2),(-1,0,-1),(0,6,2)\rangle$.
   (d) $\langle \operatorname{sen}(x),\cos(x),\operatorname{sen}(2x)\rangle$.
   (e) El espacio de polinomios de grado menor o igual que 3.

3. Encuentra las matrices de cambio de base entre estas bases, en ambas direcciones (de una base a la otra, y de la una a la otra):
   (a) Entre la base estándar de $\mathbb{R}^3$ y la base $(1,2,3),(4,5,5),(0,1,2)$.
   (b) Entre la base estándar de $\mathbb{R}^3$ y la base $(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1)$.
   (c) Entre la base $(1,2,3),(4,5,5),(0,1,2)$ y la base $(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1)$.
   (d) Entre $\operatorname{sen}(x),\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x+1),\cos(x+1)$.
   (e) Entre la base estándar de $\mathbb{R}^2$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (esta es la base estándar, girada 45 grados).
   (f) Entre la base estándar de $\mathbb{R}^2$ y $(\cos(\theta),\operatorname{sen}(\theta)),(-\operatorname{sen}(\theta),\cos(\theta))$ (esta es la base estándar, girada θ grados).

4. (a) Demuestra que si $AB=0$ y $B\neq 0$, entonces las columnas de A son linealmente dependientes.
   (b) Encuentra dos matrices A y B tales que $AB=0$, $B\neq 0$ y las filas de A sean linealmente independientes.
   (c) Demuestra que si $AB=0$ y $A\neq 0$, entonces las filas de A son linealmente dependientes.
   (d) Encuentra dos matrices A y B tales que $AB=0$, $A\neq 0$ y las columnas de B sean linealmente independientes.
   (e) Encuentra dos matrices A y B tales que $AB=0$, A tenga filas linealmente independientes y B tenga columnas linealmente independientes.
   (f) ¿Es verdad que si $AB=0$, entonces $A=0$ o $B=0$?