Hoja 6

Matemáticas I. Grado en Ingeniería biomédica

Los problemas que empiezan por 🌈 me parecen demasiado difíciles para un examen, pero interesantes.

1. ¿Son independientes estos conjuntos de vectores? Si son dependientes, encuentra un subconjunto que forme una base del espacio que generan.

   (a) $\{(1,1,0),(0,0,0)\}$.
   (b) $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$.
   (c) $\{(1,1,0,2),(2,-1,1,0),(-3,0,-1,-2)\}$.
   (d) $\{\}$ (en $\mathbb{R}^3$)
   (e) $\{e^x, \operatorname{sen}(x)\}$
   (f) $\{1, \operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$

2. Demuestra que si $v_1, v_2, v_3 \in V$ son vectores en un espacio vectorial, entonces $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es un subespacio, es decir, demuestra que es un conjunto cerrado para la suma y la multiplicación.

3. Encuentra una base de los siguientes espacios vectoriales.

   (a) $\langle(1,2,1,-3),(1,0,1,-1),$ $(0,3,0,0),(-2,3,1,1)\rangle$.
   (b) El núcleo de $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) El núcleo de $(0,0)$.
   (d) El espacio generado por $(1,0,0)$, $(1,1,1)$, $(1,2,2)$, etc, hasta $(1,2022,2022)$.
   (e) $\langle 1, \operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x) \rangle$

4. Verdadero o falso: Para cualesquiera matrices A y B que se puedan multiplicar,

   (a) Si las columnas de A son dependientes, entonces las de BA también.
   (b) Si las columnas de A son independientes, entonces las de BA también.
   (c) Si las columnas de BA son dependientes, entonces las de A también.
   (d) Si las columnas de BA son independientes, entonces las de A también.
   (e) Si las filas de A son dependientes, entonces las de BA también.
   (f) Si las filas de A son independientes, entonces las de BA también.
   (g) Si las filas de BA son dependientes, entonces las de A también.
   (h) Si las filas de BA son independientes, entonces las de A también.
   (i) Si A tiene más filas que columnas, sus columnas no pueden ser independientes.
   (j) Si A tiene más columnas que filas, sus columnas no pueden ser independientes.

5. Escribe 5 vectores de $\mathbb{R}^2$ de manera que cualesquiera 2 de ellos formen una base. 🌈 ¿Sabrías escribir 2022?

6. Escribe 5 vectores de $\mathbb{R}^3$ de manera que cualesquiera 3 de ellos formen una base.

7. (a) Encuentra 1 polinomio que sea linealmente independiente (es decir, que no sea 0).
   (b) Encuentra 2 polinomios que sean linealmente independientes.
   (c) Encuentra 3 polinomios que sean linealmente independientes.
   (d) 🌈 Encuentra 2022 polinomios que sean linealmente independientes.
   (e) 🌈 ¿Hay algún n para el que la dimensión del espacio vectorial de los polinomios sea n?

8. Estos son los primeros números de Fibonacci:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

El diablo de los números, de Hans Magnus Enzensberger es un libro que recomiendo encarecidamente. Su protagonista, Robert, vive atormentado por las matemáticas, y en uno de los capítulos, por millones de conejos que se reproducen al ritmo de la sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci empieza con $0, 1$, y a partir del siguiente número, cada nuevo número es la suma de los dos anteriores:

$$1 = 0 + 1, 2 = 1 + 1, 3 = 1 + 2, 5 = 2 + 3, \ldots$$

Vamos a demostrar una fórmula para el n-ésimo número de Fibonacci. Cada apartado es una pista para los siguientes.

(a) Una sucesión es una secuencia infinita[1] de números reales:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots$$

Se pueden sumar término a término y multiplicar por un número, también término a término. Demuestra que forman un espacio vectorial (pista: es como si fueran vectores de $\mathbb{R}^n$ con muchas componentes).

(b) Demuestra que las sucesiones que cumplen que $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$ para todo i forman un subespacio vectorial, que contiene a la sucesión de Fibonacci. Llamemos V a ese espacio vectorial.

(c) Resuelve la ecuación $x^2 = x + 1$. Demuestra que si x es una solución de esta ecuación, entonces la sucesión

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, a_i = x^i, \ldots$$ [2]

es un elemento de V.

(d) Usando la parte anterior, encuentra dos elementos de V linealmente independientes. Los llamaremos u y v.

(e) Demuestra que el único elemento de V que empieza por $(0, 0, \ldots)$ es el 0.

(f) Demuestra que si $a = (a_0, a_1, \ldots)$ es un elemento de V, entonces existen números α y β para los que $a - \alpha u - \beta v$ empieza por $0, 0, \ldots$.

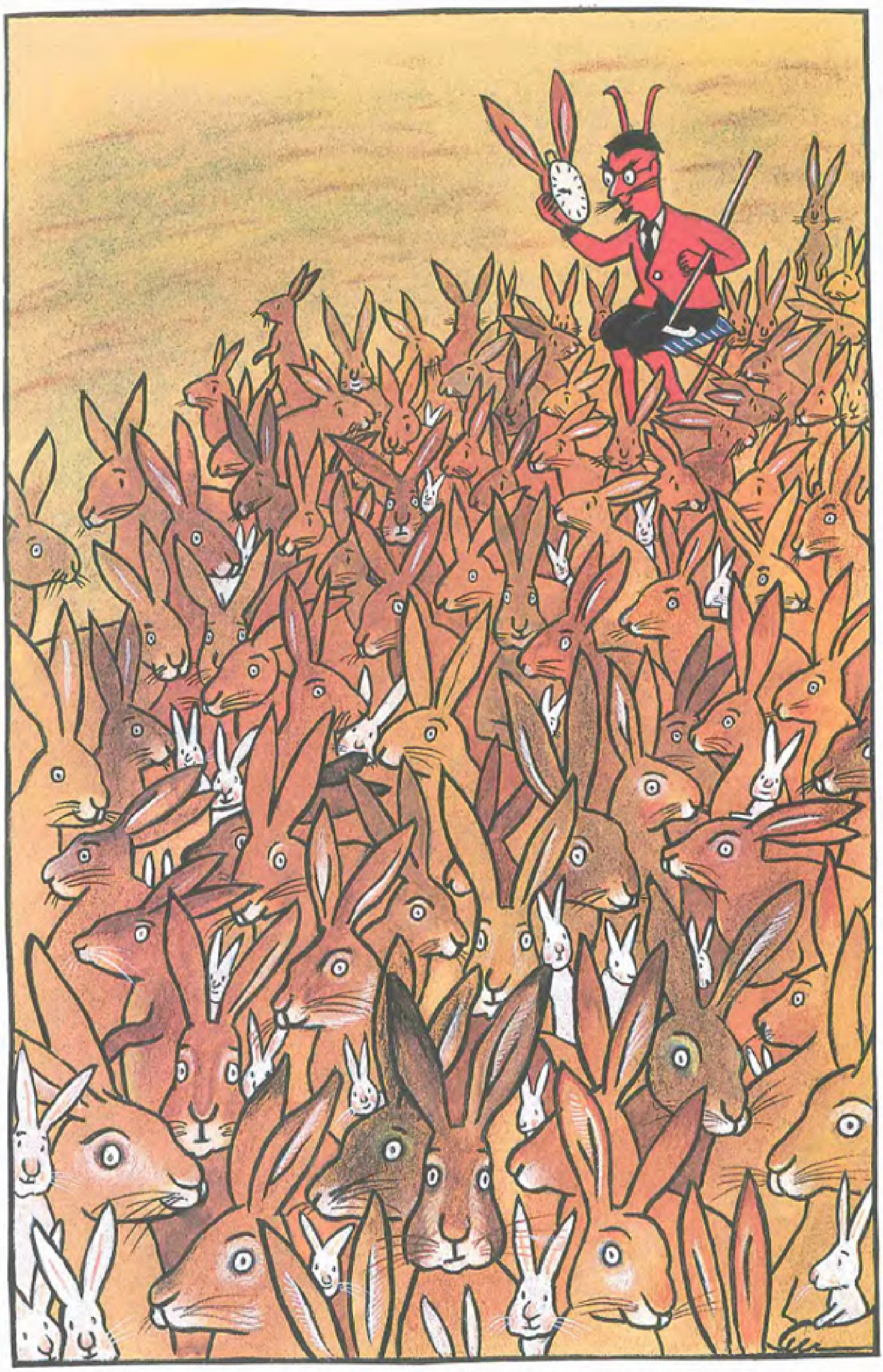
(g) Demuestra que u y v generan V.

(h) Encuentra α y β para los que la sucesión de Fibonacci es igual a $\alpha u + \beta v$.

(i) Encuentra una fórmula para el n-ésimo número de Fibonacci.

[1] Si pensar en sucesiones infinitas te crea problemas de tipo epistemológico, puedes hacer esto para evitar el infinito: Elige el número más grande que te parezca razonable desde un punto de vista filosófico. Por ejemplo, si yo creo que los números a partir de 100 son demasiado grandes y no pueden existir, puedo hacer este ejercicio haciendo que todas las sucesiones tengan 100 elementos en vez de infinitos. Entonces, el espacio vectorial de sucesiones es $\mathbb{R}^{100}$.

[2] En mi caso, esta lista acabaría en x^{100}.



The rabbit clock ran on and on. "Help!" Robert shouted. "Thousands of rabbits and no end in sight! This is no joke, it's a nightmare!"