Hoja 4

Matemáticas I. Grado en Ingeniería biomédica

1. Di para qué valores de los parámetros a, b, c, d estos sistemas son compatibles determinados (saldrá alguna ecuación, que no hace falta resolver) y resuélvelos para esos valores. En los casos en los que no son compatibles determinados, ¿son compatibles?

   (a)
   $$\left.\begin{array}{lll} ax & -by & = c \\ bx & +ay & = d \end{array}\right\}$$

   (b)
   $$\left.\begin{array}{llll} ax & +by & +cz & = a \\ bx & +cy & +az & = b \\ cx & +ay & +bz & = c \end{array}\right\}$$

2. Encuentra la inversa de estas matrices, si es que son invertibles (dependerá del valor de los parámetros).

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

   (c)
   $$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -z & -z \end{pmatrix}$$

   (d)
   $$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. ¿Cuáles son espacios vectoriales? Justifica tu respuesta. Si no está especificado, la suma y producto de vectores de $\mathbb{R}^n$ es la usual, y lo mismo para las funciones.

   (a) Una línea cualquiera en el plano.

   (b) Una línea en el plano que pasa por el origen.

   (c) El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, es decir, los puntos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ que cumplen que $x^2 + y^2 = 1$. (La suma y multiplicación son las usuales de $\mathbb{R}^2$)

   (d) El conjunto de funciones $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ que cumplen que $f(0) = 0$.

   (e) El conjunto de funciones $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ que cumplen que $f(0) = 1$.

   (f) El conjunto de funciones $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$.

   (g) El conjunto de matrices cuadradas que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (h) El conjunto de matrices A de tamaño 2×2 que cumplen que $A^2 = I$.

   (i) El conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z \leq 5\}$.

   (j) Los números reales positivos con otras operaciones. La "suma" es la operación $a \oplus b = a \cdot b$, y la "multiplicación" es la operación $\lambda \odot a = a^\lambda$.

   (k) Los números reales con otras operaciones. La "suma" es la operación $a \oplus b = \min(a, b)$, y la "multiplicación" es la operación $a \odot b = a + b$.

   (l) El mismo ejemplo, pero añadimos otro elemento y lo llamamos ∞. ∞ cumple que $\min(\infty, a) = a$ para cualquier a y que $a + \infty = \infty$.

   (m) El conjunto de funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen que $f'(x) = -2f(x)$.

   (n) El conjunto de funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen que $(f'(x))^2 = 4f(x)$. ($f(x) = x^2$ cumple esto).

   (o) Las soluciones de $Ax = b$.

(p) Las soluciones de $Ax = 0$.

(q) El conjunto de matrices 3×3 invertibles.

(r) El conjunto de matrices 3×3 no invertibles.

4. Demuestra que un espacio vectorial sólo tiene un 0, es decir, sólo hay un elemento neutro para la suma.

5. Demuestra que en un espacio vectorial, $x + x = 2x$ para cualquier elemento x.

6. Si u, v, w son elementos de un espacio vectorial V y se cumple que

$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 0 \\ 4u + v - 3w &= 0 \\ v + w &= 0 \end{aligned}$$

Demuestra que $u = v = w = 0$

7. ¿Cuáles de los siguientes son subespacios de $\mathbb{R}^2$? (Justifica tu respuesta, no hace falta ni decirlo)

(a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2\}$

(b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$

(c) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| = |x_2|\}$

(d) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 = x_2^3\}$

8. ¿Cuáles de los siguientes son subespacios de $\mathbb{R}^3$? (Justifica tu respuesta, no hace falta ni decirlo)

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$

(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

(c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$

(d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 \text{ o } x_2 = x_3\}$

9. ¿Cuáles de los siguientes son subespacios del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 4? (Justifica tu respuesta, no hace falta ni decirlo)

(a) Los polinomios de grado exactamente 4.

(b) Los polinomios de grado menor o igual que 3.

(c) Los polinomios de grado mayor o igual que 3.

(d) Los polinomios p que cumplen que $p(0) = 0$.

(e) Los polinomios p que cumplen que $p(2) = 0$.

(f) Los polinomios p que cumplen que $p(0) = 2$.

(g) Los polinomios p que cumplen que $p(2) = 2$.