Hoja 4

Matemáticas I. Grado en Ingeniería biomédica

1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{pmatrix} a & 2 & 0 & -1 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & -3 & 2 \\ a & 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

(d)
$$\begin{pmatrix} t & 2 & 3 \\ 3 & t & 4 \\ 5 & 6 & t \end{pmatrix}$$

(e)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(f)
$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & x & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & x & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

2. Esta es la matriz de Vandermonde[1]:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}.$$
Comprueba que el determinante de la matriz es
$$(y-x)(z-x)(z-y).$$
¿Para qué valores de x, y, z es la matriz singular y para cuáles es regular? Si estás teniendo un día especialmente aventurero, calcula el determinante de la matriz de Vandermonde $n \times n$.

3. Un polinomio de grado 2 es una función de esta forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$. ¿Cuántos polinomios de grado 2 cumplen que $f(12) = 42$, $f(153) = -239$ y $f(5983) = \pi$? (Atención: la pregunta es cuántos, no cuáles)

4. ¿Es verdad que $\det(AB) = \det(BA)$ para cualesquiera dos matrices cuadradas A y B?

5. Si A es invertible, da una fórmula para $\det(A^{-1})$.

6. Si $A^2 = A$, ¿cuánto puede valer $\det(A)$?

7. Supón que conoces la factorización LU de una matriz A, es decir, que $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U es una matriz triangular superior. ¿Cómo calcularías el determinante de A?

8. Sabemos que si escribimos una matriz cuadrada A al lado de la matriz identidad, es decir, escribimos la matriz $(A|I)$, y hacemos operaciones por filas hasta llegar a $(I|B)$, entonces la matriz B que queda ha de ser la inversa de A.

[1] Vandermonde tiene página de Wikipedia en 22 idiomas. Pasad a la historia inventando nuevos determinantes.

(a) ¿Qué matriz es B si haciendo operaciones por filas llegamos de $(A|2I)$ a $(I|B)$? (La respuesta estará relacionada con A^{-1})

(b) ¿Qué matriz es B si haciendo operaciones por filas llegamos de $(A|E)$ a $(I|B)$, donde E es la matriz que es la identidad excepto que tiene un 0 en la posición $(1,1)$?

(c) ¿Qué matriz es B si haciendo operaciones por filas llegamos de $(A|C)$ a $(I|B)$? (La respuesta dependerá de C)

9. Discute el sistema en función del parámetro a.

$$\left.\begin{array}{llll} 2x & +(8-a)y & +z & =3 \\ x & +(1+a)y & +(4-a)z & =6-a \\ & (a-2)y & +(5-2a)z & =2a-5 \end{array}\right\}$$

10. Imagina que una matriz se puede escribir en cuatro bloques:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

Aquí, cada letra es una matriz, y para que cuadre A y B tienen que tener el mismo número de filas, etc.

(a) Si tenemos dos matrices en bloques, ¿es verdad esta identidad? ¿Qué dimensiones tienen que tener las matrices para que se puedan hacer las multiplicaciones?

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} E \\ \hline G \end{array}\right) = AE + BG.$$

Puedes intentar primero pensar qué ocurre si todos los bloques son 2×2.

(b) Si tenemos dos matrices en bloques, ¿es verdad esta identidad? ¿Qué dimensiones tienen que tener las matrices para que se puedan hacer las multiplicaciones?

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AE+BG & AF+BH \\ \hline CE+DG & CF+DH \end{array}\right).$$

Puedes intentar primero pensar qué ocurre si todos los bloques son 2×2.

(c) Si A es una matriz $m \times n$, b es un vector columna $m \times 1$ y v es un vector columna $n \times 1$, ¿cuál es el resultado de esta operación?

$$\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline \vec{0} & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} v \\ \hline 1 \end{array}\right).$$

($\vec{0}$ es una fila de ceros)

(d) Si A, B, C, D son matrices cuadradas de la misma dimensión, ¿es verdad esta identidad?

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C).$$

(e) Si A, B, C son matrices cuadradas de la misma dimensión, ¿es verdad esta identidad?

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det(A)\det(C).$$