Hoja 2

Matemáticas I. Grado en Ingeniería biomédica

1. Calcula la inversa de estas matrices, si existe.

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c)
   $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (d)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (e) La matriz 2022×2022 (a_{ij}) que cumple que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, y $a_{ii} = i$ para $1 \leq i \leq 2022$.

   (f)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. (a) Encuentra todas las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Encuentra todas las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (c) Encuentra todas las matrices que conmutan con cualquier matriz 2×2.

   (d) Basándote en el caso 2×2, ¿qué matrices crees que conmutan con cualquier matriz 3×3? ¿Sabrías demostrarlo? (¡Difícil!)

3. Vamos a demostrar que si una matriz tiene más columnas que filas, entonces nunca puede tener inversa por la izquierda. Sea A una matriz $m \times n$, donde $m < n$.

   (a) Demuestra que si hay una matriz $n \times m$ B que cumple que $BA = I_n$, entonces también tiene inversa la matriz cuadrada obtenida al añadir $n - m$ filas de ceros a A.

   (b) Demuestra que una matriz cuadrada que tiene alguna fila de ceros no puede ser regular.

4. ¿A qué operación en las filas corresponde multiplicar una matriz por la izquierda por $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$? ¿Cómo se puede expresar esta operación como una secuencia de operaciones elementales?

5. Escribe (o da indicaciones de cómo escribir) 2022 matrices 2×2 de manera que ninguna sea equivalente por filas a otra.

6. Calcula la inversa de estas matrices:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.01 & 1 \\ 1 & 1 & 1.01 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.001 & 1 \\ 1 & 1 & 1.001 \end{pmatrix}$$

7. Demuestra que si una matriz cuadrada A cumple que $A^4 = 0$, entonces $I + A$ es invertible y $(I + A)^{-1} = I - A - A^2 - A^3$.

8. Demuestra que si una matriz cuadrada A cumple que $A^3 = I$, entonces es invertible. ¿Se te ocurre alguna matriz A 3×3 que cumpla esto y no sea la identidad? Hay una que es el producto de dos matrices elementales.