Hoja 12

Matemáticas I. Grado en Ingeniería biomédica

Los problemas que empiezan por 🌈 me parecen demasiado difíciles para un examen, pero interesantes.

1. ¿Cuáles de estos conjuntos son una base ortnormal del espacio correspondiente?
   (a) En el núcleo de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\{(0,0,1,0),(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0,0\})$.
   (b) En el núcleo de $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\{(1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2}),(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}\}$.
   (c) En $\langle(1,1,0),(0,1,1)\rangle$, $\{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0),(0,0,1)\}$.
   (d) En $\mathbb{R}^3$, $\{(1,1,0),(0,1,1),(-1,0,1)\}$.
   (e) $\{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0,0),(0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\}$ en el espacio que generan.
   (f) En $\mathbb{R}^2$, $\{(1,1),(1,-1)\}$.
   (g) En el núcleo de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0,0),(0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)\}$.
   (h) En $\langle(1,1,-2),(1,-2,1),(-2,1,1)$, $\{(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0),(1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},-2/\sqrt{6})\}$.

2. Encuentra una base ortonormal de los siguientes espacios:
   (a) (Esto es una tontería que no os voy a preguntar) 0.
   (b) $\mathbb{R}$
   (c) $\langle(1,2,-3),(1,1,1)\rangle$.
   (d) $\langle(1,0,0,0),(2,3,-4,1)\rangle$.
   (e) $\langle(1,0,1,0),(2,1,3,-1),(0,2,2,-2)\rangle$.
   (f) $\langle(1,0,1,0),(2,1,3,-1),(0,2,3,0)\rangle$.
   (g) El núcleo de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (h) El núcleo de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Encuentra un vector que forme un ángulo de 60° con el vector $(1,1,1,1)$.

4. Verdadero o falso.
   (a) Cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortonormal.
   (b) Si unos vectores $v_1, \dots v_m$ en un subespacio V de $\mathbb{R}^n$ cumplen que $v_i \cdot v_j = 0$ si $i \neq j$ y $v_i \cdot v_i = 1$, entonces son una base ortnonormal.
   (c) Un conjunto de vectores dependientes no puede ser ortonormal.