Hoja 11

Matemáticas I. Grado en Ingeniería biomédica

Los problemas que empiezan por 🌈 me parecen demasiado difíciles para un examen, pero interesantes.

1. Para las siguientes matrices, encuentra una base que las hace diagonales, y para cada matriz A, encuentra una matriz B de manera que $B^{-1}AB$ es diagonal.

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   (c)
   $$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (d)
   $$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

   (e)
   $$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

2. ¿Por qué no tiene sentido hablar de los autovectores de una matriz que no es cuadrada?

3. ¿Por qué no consideramos el 0 como un autovector?

4. (a) ¿Cuáles son **todas** las bases en las que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonal? (hay infinitas, pero se pueden describir)

   (b) Si una aplicación lineal $A\colon V \to V$ tiene en alguna base $\{v_1, v_2\}$ la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ¿cuáles son todas las demás bases en las que la matriz es diagonal?

   (c) ¿Cuáles son todas las bases en las que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ se vuelve diagonal?

5. (No le des muchas vueltas si te parece fácil) Si A y B son matrices cuadradas y $B^{-1}AB = A$, demuestra que A y B conmutan, es decir, $AB = BA$. ¿Tiene sentido esta pregunta si alguna de ellas no es cuadrada?

6. Si A y B son matrices cuadradas y $B^{-1}AB = I$ ¿qué podemos decir de A y B?

7. ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

   (a) Si $A\colon V \to W$ es lineal y v_1, v_2, v_3 son vectores dependientes, entonces $A(v_1), A(v_2), A(v_3)$ son vectores dependientes.

   (b) Si $A\colon V \to W$ es lineal y v_1, v_2, v_3 son vectores dependientes, entonces $A(v_1), A(v_2), A(v_3)$ son vectores independientes.

   (c) Si $A\colon V \to W$ es lineal y v_1, v_2, v_3 son vectores independientes, entonces $A(v_1), A(v_2), A(v_3)$ son vectores dependientes.

   (d) Si $A\colon V \to W$ es lineal y v_1, v_2, v_3 son vectores independientes, entonces $A(v_1), A(v_2), A(v_3)$ son vectores independientes.

   (e) Hay alguna matriz 2×2 que no tiene ningún autovalor real.

   (f) Todas las matrices 1×1 tienen exactamente un autovalor.

   (g) La matriz 0 sólo tiene el autovalor 0.

(h) Si una matriz $n \times n$ A sólo tiene el autovalor 0, entonces su polinomio característico es $(-\lambda)^n$.

(i) Si una matriz A sólo tiene el autovalor 0, entonces $A = 0$.

(j) Si una matriz A tiene algún autovalor que es 0, entonces $A = 0$.

(k) Si $A^2 = I$, entonces sólo ± 1 pueden ser autovalores de A.

8. 🌈 Vamos a demostrar que si una aplicación lineal $A\colon V \to V$ tiene n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, con sus correspondientes autovectores $v_1, \ldots, v_n$ (todos distintos de 0, porque si no no los llamaríamos autovectores), entonces los vectores $v_1, \ldots v_n$ son linealmente independientes.

   (a) Demuestra que si los vectores $v_1, \ldots, v_n$ fueran linealmente dependientes, entonces podríamos encontrar números $a_1, \ldots, a_n$ que no son todos 0 y que cumplieran estas dos ecuaciones:

   $$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n &= 0 \\ a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + a_n \lambda_n v_n &= 0 \end{aligned}$$

   (b) Alguno de los a_is tiene que ser no nulo. Supongamos que por ejemplo $a_1 \neq 0$. De las ecuaciones anteriores y del hecho de que $v_1 \neq 0$, deduce que $v_2, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes.

   (c) Explica cómo aplicar este razonamiento repetidamente lleva a una contradicción.

9. 🌈

   (a) Si tenemos matrices tales que $C = BAB^{-1}$, demuestra que $C^2 = BA^2B^{-1}$.

   (b) Si tenemos matrices tales que $C = BAB^{-1}$, demuestra que $C^5 = BA^5B^{-1}$.

   (c) Si tenemos matrices tales que $C = BAB^{-1}$, explica por qué $C^n = BA^nB^{-1}$ para cualquier $n \geq 0$.

   (d) Si tenemos matrices tales que $C = BAB^{-1}$ y además A es invertible, explica por qué $C^{-1} = BA^{-1}B^{-1}$ para cualquier $n \geq 0$.

   (e) Si F_n es el n-ésimo número de Fibonacci (es decir, $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots = 0, 1, 1, 2, 3, \ldots$), demuestra que $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (f) Encuentra F_{20} y F_{30} (puedes usar una calculadora).

10. 🌈 Aena me ha perdido la maleta en el Aeropuerto Adolfo Suárez-Barajas. El día 30 de noviembre estaba en Madrid. Cada día, Aena sigue estas reglas para determinar qué hace con mi maleta.

   - Si la maleta está en Madrid, tiran un dado. Si sale un 1 o un 2, la mandan a Tenerife, si sale un 3 o un 4 la mandan a Barcelona, y si sale un 5 o un 6 la dejan en Madrid ese día.
   - Si la maleta está en Tenerife, tiran una moneda al aire. Si sale cara, va a Barcelona y si sale cruz, va a Madrid.
   - Si la maleta está en Barcelona, tiran una moneta al aire. Si sale cara, va a Tenerife y si sale cruz, va a Madrid.

   (a) Calcula las probabilidades de que el día 1 de diciembre la maleta esté en cada ciudad.

   (b) Calcula las probabilidades para el día 2 y 3 de diciembre.

   (c) Demuestra que si las probabilidades de que el día n de diciembre la maleta esté en Madrid, Tenerife o Barcelona son x, y, z respectivamente, entonces

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (d) Calcula la probabilidad de que la maleta esté en Madrid el 25 de diciembre.

   (e) Aproxima la probabilidad de que la maleta esté en Madrid el 25 de noviembre de 2023.

Este proceso se llama una cadena de Markov, seguramente en honor a Adolfo Suárez Markov, el presidente de Aena.