Hoja 1

Matemáticas I. Grado en Ingeniería Biomédica

1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de eliminación.

(a)
$$\left.\begin{array}{rrrl} & -x_2 & +x_3 & =-1 \\ x_1 & +x_2 & -3x_3 & =4 \\ x_1 & & -x_3 & =2 \end{array}\right\}$$

(b)
$$\left.\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -x_2 & -x_3 & & & =1 \\ & & 2x_3 & +x_4 & +2x_5 & =1 \\ x_1 & -x_2 & & +3x_4 & +6x_5 & =4 \\ 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & +2x_2 & =3 \\ x_1 & -x_2 & & -x_4 & -2x_5 & =0 \end{array}\right\}$$

(c)
$$\left.\begin{array}{rrrrl} & & -2x_3 & +6x_4 & =1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & =7 \\ & & -x_3 & +6x_4 & =3 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & =-7 \end{array}\right\}$$

(d)
$$\left.\begin{array}{rrrl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & =1 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & =3 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & =7 \end{array}\right\}$$

(e)
$$\left.\begin{array}{rrrrl} & x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ 3x_1 & & +x_3 & -4x_4 & =7 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & =6 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & +3x_4 & =6 \end{array}\right\}$$

2. Considera el sistema:
$$\left.\begin{array}{rrl} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & =b_2 \end{array}\right\}$$
Demuestra que si $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$, entonces el sistema es compatible determinado y la solución es:
$$\left(\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\right)$$

3. Discute los sistemas que tienen las siguientes matrices de coeficientes:
$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \\ 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \\ 36 & 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 \end{array}\right)$$

4. Demuestra que si $(s_1,s_2,\dots,s_n)$ es una solución del sistema
$$\left.\begin{array}{rrrrl} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{array}\right\}$$

entonces también es solución del sistema

$$\left.\begin{array}{llll} (a_{11}+\lambda a_{22})x_1 & +(a_{12}+\lambda a_{22})x_2 & +\cdots & +(a_{1n}+\lambda a_{2n})x_n & = b_1+\lambda b_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right\}$$

para cualquier número λ.

Explica por qué el mismo razonamiento sirve para demostrar que toda solución del segundo sistema es solución del primero.

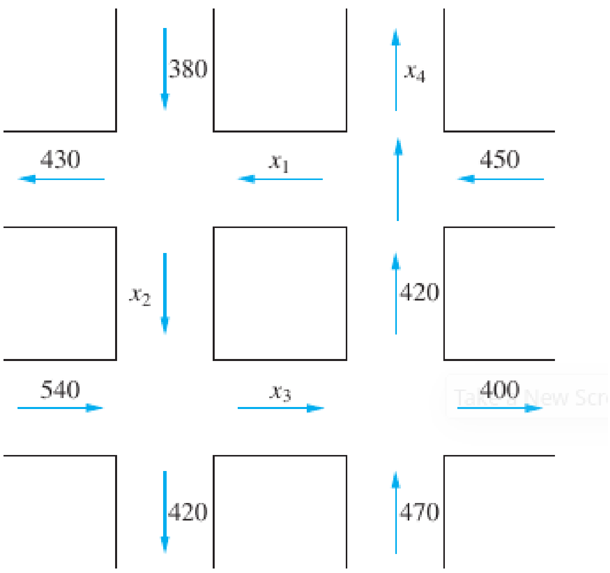
5. En clase hemos visto que un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas tiene como conjunto de soluciones una de estas tres opciones: el vacío, un punto o una recta. Explica cuáles son las posibles posiciones relativas de dos planos en el espacio tridimensional y cuáles son los posibles conjuntos de soluciones para un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Explica cuáles son los posibles conjuntos de soluciones para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

6. Hay 4 "formas" posibles que puede tener una matriz 2×2 escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Estamos usando $*$ para denotar un número cualquiera (y sea cual sea $*$ diremos que tiene la misma "forma" diremos que tiene la misma "forma"). ¿Cuántas formas escalonadas distintas puede tener una matriz 3×2? ¿Y 2×3?¿Y 3×3?

7. La siguiente imagen muestra una porción de un mapa y el número de vehículos que pasan por cada calle cada hora.



Teniendo en cuenta que en cada intersección entra el mismo número de vehículos que sale, encuentra x_1, x_2, x_3, x_4.

8. La combustión de la glucosa tiene este fórmula:

$$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \longrightarrow 6CO_2 + 6H_2O$$

La ecuación está equilibrada: esto significa que de cada elemento hay el mismo número de átomos a cada lado. Por ejemplo, a la izquierda hay $1\cdot 6 + 6\cdot 2 = 18$ átomos de oxígeno (O) y a la derecha hay $6\cdot 2 + 6\cdot 1 = 18$ átomos de oxígeno. Encuentra los valores que equilibran esta reacción:

$$x_1NO_2 + x_2H_2O \longrightarrow x_3HNO_3 + x_4NO$$

¿Existe alguna reacción química que dé lugar a un sistema compatible determinado?