Hoja 5

1) Calcula los autovalores y autovectores de

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 6 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

2) Halla a para que la matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & a & 7 \\ -3 & 3a+1 & 5 \\ -4 & a & 9 \end{pmatrix}$$

tenga $\lambda = 1$ como autovalor. Para ese valor de a calcula todos los autovectores.

3) Halla $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $C^{-1}AC$ sea diagonal, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Decide si las siguientes matrices son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Cuando lo sean, indica una base formada por vectores propios.

5) Halla bases ortogonales en las que la siguientes matrices simétricas diagonalicen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6) Halla la forma diagonal de las siguientes matrices unitarias:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ 1-i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Para la primera da además una base ortonormal formada por autovectores.

7) Explica por qué si λ es un valor propio de una matriz A entonces también lo es de A^t y λ^2 lo es de A^2.

8) Todos conocemos un polinomio de coeficientes enteros con una de sus raíces igual a $\sqrt[3]{3}$, pero no muchos sabrían hallar uno tal que $\alpha = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 2$ sea una de sus raíces. En este ejercicio vamos a ver un método generalizable para hacerlo. En primer lugar, comprueba que $\sqrt[3]{3}$ es valor propio de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Procediendo como en el ejercicio anterior, prueba que α es autovalor de $A^2 - A + 2I$ (esto no requiere ninguna cuenta). Halla su polinomio característico para obtener un polinomio de coeficientes enteros y grado 3 que se anula en α.

9) Sea

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Calcula A^{2020} de manera totalmente explícita, sin dejar nada indicado. Posiblemente necesitarás $\big((i\sqrt{3}-1)/2\big)^{2020} = \big(e^{2\pi i/3}\big)^{2020} = e^{2\pi i/3} = (i\sqrt{3}-1)/2$. ¿Sabes justificar estas igualdades?

10) Halla una fórmula para la sucesión de vectores $\{\vec{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisface

$$\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{x}_n \qquad \text{con} \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

11) Considera la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ que verifica $2a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0$ con $a_0 = a_1 = 3$. Comprueba que se cumple

$$\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5/2 \end{pmatrix}\vec{x}_n \qquad \text{con} \quad \vec{x}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

y deduce una fórmula explícita para a_n.

12) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} x' = -3x - 4y, \\ y' = 2x + 3y, \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x' = 3x - 6y, \\ y' = 2x - 4y, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

13) Para cada una de las siguientes matrices indica cuál es la forma canónica de Jordan:

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

14) Calcula las formas canónicas de Jordan J de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$