Hoja 4

1) Sean los vectores de $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u}_1 = (5,-3,8)^t, \qquad \vec{u}_2 = (2,3,6)^t, \qquad \text{y} \qquad \vec{u}_3 = (3,-6,2)^t.$$

Calcula $\|\vec{u}_i\|$ para $i = 1,2,3$ y $\measuredangle(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ y $\measuredangle(\vec{u}_2,\vec{u}_3)$ donde $\measuredangle$ indica el ángulo.

2) Si T es un triángulo determinado por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que el producto de sus normas es 13 y su producto escalar es $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5$, ¿cuál es el área de T?

3) Explica por qué $\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ no define un producto escalar generalizado en $\mathbb{R}^2$.

4) Muestra que

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^1 (PQ + P'Q'),$$

donde P' y Q' indican derivadas, define un producto escalar generalizado en $\mathbb{R}_n[x]$ (los polinomios reales de grado a lo más n). Halla a para que el producto escalar de $ax-1$ y $2x-8$ sea -1.

5) Considera $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{C}^2$ dados por $\vec{u} = (2+3i, 8+2i)^t$ y $\vec{v} = (3+2i, 6i)^t$. Comprueba numéricamente que se cumplen para ellos las desigualdades de Cauchy-Schwarz y la triangular. Comprueba también que si cambiamos $\vec{v}$ por $(5+i, 10-6i)^t$ la desigualdad de Cauchy-Schwarz se vuelve una igualdad.

6) En $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definimos $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}\Big(A^t\big(\begin{smallmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{smallmatrix}\big)B\Big)$ donde Tr indica la traza (la suma de los elementos de la diagonal principal). Muestra que es un producto escalar generalizado. Indicación: Las dos primeras propiedades son fáciles a partir de las propiedades evidentes de la traza: $\mathrm{Tr}(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda\mathrm{Tr}(M_1) + \mu\mathrm{Tr}(M_2)$ y $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M^t)$. Para la tercera propiedad del producto escalar te puede resultar de ayuda la identidad $5x^2 + 2y^2 - 6xy = \frac{1}{2}\big(x^2 + (3x-2y)^2\big)$.

7) Sea V un subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con base $\mathcal{B} = \Big\{\big(\begin{smallmatrix}4 & 2\\ 5 & 3\end{smallmatrix}\big), \big(\begin{smallmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{smallmatrix}\big), \big(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{smallmatrix}\big)\Big\}$. Halla una base ortogonal de V empleando el proceso de Gram-Schmidt cuando el producto escalar es el del ejercicio anterior.

8) Comprueba que la base $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_2\}$ de $\mathbb{R}^3$ con

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6\\-2\\-3\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{u}_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-2\\3\\-6\end{pmatrix},$$

es ortonormal y halla las coordenadas de $(1,1,0)^t$ en $\mathcal{B}$.

9) Halla una base ortogonal del subespacio V de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$V = \big\{\vec{x}\in\mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0\big\}.$$

10) Encuentra una base ortogonal del subespacio V de $\mathbb{C}^3$ definido por

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 \,:\, x_1 - x_2 + (i-2)x_3 = 0\}.$$

11) Ortogonaliza la base $\{x-1, x+1, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ cuando se emplea el producto escalar $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} PQ$.

12) Escribe alguna base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector $(3/5, 4/5, 0)^t$.

13) Halla la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (-3, 11, 1)^t \in \mathbb{R}^3$ en el subespacio que determina el plano $2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$ de $\mathbb{R}^3$. ¿Cuál es la distancia del punto $(-3, 11, 1)$ al plano?

14) Halla la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (8, 3, 2, 0)^t \in \mathbb{R}^4$ al subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,:\, 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = x_1 + 6x_2 - 2x_3 - x_4 = 0\}$$

y utilízala para hallar la distancia del punto $(8, 3, 2, 0)$ a V.

15) Considera la función $f(x) = 1/(x+1)$ la cual es un vector del espacio vectorial de las funciones continuas en $[0, 1]$ con el producto escalar $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$ y calcula su proyección ortogonal sobre $\mathbb{R}_2[x]$. Si tienes ocasión dibuja la función y su proyección y verás que se parecen. Para las integrales puedes usar un integrador *online* o paquetes de *software* matemático.

16) Considera el siguiente subespacio de $\mathbb{C}^3$ de un ejercicio anterior:

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 \,:\, x_1 - x_2 + (i-2)x_3 = 0\}.$$

Halla la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (2-i, 2i, 2i)^t$. Nota que en el producto escalar de $\mathbb{C}^n$ el orden es importante.

17) Indica si las siguientes matrices son unitarias:

$$\frac{\sqrt{2}}{10}\begin{pmatrix} 5-3i & 4i \\ 4i & 5+3i \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4+i & 2+2i \\ -2+2i & 4-i \end{pmatrix}.$$

18) Halla todas las matrices unitarias $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ que tienen $u_{11} = u_{22} = \frac{1}{2}(i-1)$ y u_{12} con parte real $1/2$.

19) Si la primera y la segunda columna de una matriz ortogonal de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ son respectivamente $c_1 = (2/3, -2/3, -1/3)^t$ y $c_2 = (-1/3, -2/3, 2/3)^t$ halla todas las posibilidades para la tercera columna.

20) ¿Cuántas matrices hay en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que sean a la vez ortogonales y diagonales? Aparte de ellas, ¿existen matrices en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ortogonales y triangulares superiores? Recuerda o aprende que las matrices triangulares superiores son las que tienen $a_{ij} = 0$ para $i > j$.