Hoja 2

Nota. *En los dos primeros ejercicios se da por sabido que* K^n, $\mathcal{M}_{m\times n}(K)$ *y* $\{f : X \longrightarrow K\}$ *con* $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *son espacios vectoriales. Se denotan con* $\mathbb{R}[x]$ *y* $\mathbb{C}[x]$ *los espacios vectoriales de polinomios reales y complejos, respectivamente, y con* $\mathbb{R}_n[x]$ *y* $\mathbb{C}_n[x]$ *los de grado a lo más* n.

1) Indica cuáles de los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$:
a) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + 2x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 1\}$.
b) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,:\, A^2 = A\}$.
c) $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,:\, A + A^t = O\}$.
d) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables tales que $f'(x) + (x + 2020)f(x) = 0\}$.

2) Indica cuáles de los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$:
a) $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ con dos derivadas tales que $f'' + f = 0\}$.
b) $\{P \in \mathbb{C}[x] \,:\, P(x) = P(1 + i - x)\}$.
c) $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,:\, B^tAB = I_2$ con $b_{11} = b_{12} = i,\ b_{21} = b_{22} = 1\}$.

3) Explica con detalle por qué $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,:\, A = \overline{A}^t\}$ no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ pero sí lo es sobre $\mathbb{R}$.

4) El espacio vectorial $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ se define de forma similar a $\mathbb{C}^2$, pero permitiendo solo la multiplicación por números reales (se sustituye $K = \mathbb{C}$ por $K = \mathbb{R}$). Explica por qué $\dim \mathbb{C}^2 = 2$ y $\dim \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}} = 4$. Escribe en cada caso una base.

5) Halla una base de $V = \{\vec{x} \in \mathbb{C}^3 \,:\, x_1 + x_2 + 2ix_3 = 0\}$ y añade los vectores que sean necesarios para extenderla a una base de $\mathbb{C}^3$.

6) Calcula una base del subespacio de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formado por las matrices simétricas cuya suma de columnas sea el vector nulo $\vec{0}$. Recuerda que se llaman matrices simétricas a las que cumplen $A = A^t$.

7) Halla una base del subespacio (sobre $\mathbb{C}$) $V = \{P \in \mathbb{C}_3[x] \,:\, x + i$ divide a $P\}$ y halla las coordenadas de $x^3 + (1 + 3i)x^2 + 2(i - 1)x - 1$ en esa base.

8) Comprueba que $f_1(x) = \operatorname{sen}(3x)$ y $f_2(x) = \cos(3x)$ pertenecen al espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ de funciones con dos derivadas que resuelven la ecuación del movimiento armónico simple $f'' + 9f = 0$. Prueba que f_1 y f_2 son linealmente independientes y considera combinaciones lineales suyas para hallar una solución de

$$f'' + 9f = 0 \qquad \text{con} \quad f\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = 5, \quad f'\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = 9.$$

9) Decide si las matrices

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

conforman una base del subespacio $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,:\, A = \overline{A}^t,\ a_{11} + a_{22} = 0\}$ sobre $\mathbb{R}$.

10) Halla bases del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 12 & -10 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

11) Sea el subespacio $V \subset \mathbb{R}[x]$ cuya base es $\mathcal{B} = \{(x+1)^2, x^2+1\}$. Explica por qué la aplicación que envía $P(x)$ a $P(-x)$ es un endomorfismo biyectivo y halla su matriz y la de su inversa en la base $\mathcal{B}$.

12) Estudia si la aplicación lineal $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dada por

$$f(A) = B^t A B \qquad \text{con} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es inyectiva o sobreyectiva. Halla una base de su imagen.

13) Considera el endomorfismo de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A - A \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Halla su matriz en alguna base (la que prefieras) y calcula la dimensión de su núcleo e imagen.

14) Halla la matriz del endomorfismo $f(X) = TXT$ donde T es la matriz 2×2 con $t_{11} = 2$, $t_{12} = t_{21} = t_{22} = 1$, en el espacio V generado por la base

$$\mathcal{B}' = \{B_1', B_2', B_3'\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para ello, ajusta los coeficientes a_{ij} en $f(B_j') = a_{1j}B_1' + a_{2j}B_2' + a_{3j}B_3'$.

15) Dado el endomorfismo de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A + A^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

estudia si su imagen coincide con todas las matrices simétricas. Halla también una base del núcleo.

16) Supongamos que un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{en la base } \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} \text{ donde } \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula su matriz en la base canónica.

17) Halla las ecuaciones del subespacio $V \subset \mathbb{R}^5$ generado por los vectores

$$\vec{v}_1 = (1,2,1,0,1)^t, \qquad \vec{v}_2 = (1,-1,0,2,2)^t, \qquad \vec{v}_3 = (1,1,1,1,0)^t.$$

Es decir, halla una matriz A tal que $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 \,:\, A\vec{x} = \vec{0}\}$.

18) Halla todos los vectores del subespacio $V \subset \mathbb{R}^4$ con base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ donde $\vec{v}_1 = (2,0,-1,1)^t$ y $\vec{v}_2 = (-2,3,-2,-3)^t$ que estén en el núcleo de la aplicación lineal $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ que da la suma de coordenadas.

19) Estudia si se obtiene una base de $\mathbb{R}^4$ o no al añadir los vectores $(1,1,1,1)^t$ y $(1,-2,3,1)$ a los de una base del subespacio

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \,:\, 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 8x_4 = x_1 + x_2 - 5x_4 = 0\}.$$

20) Una matriz $M \in \mathcal{M}_n$ se dice que es *antisimétrica* si $M^t = -M$. Utilizando la igualdad $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$ explica por qué si $\mathcal{B}_s$ es una base de las matrices simétricas de $\mathcal{M}_n$ y $\mathcal{B}_a$ es una base de las matrices antisimétricas, entonces $\mathcal{B}_s \cup \mathcal{B}_a$ es base de $\mathcal{M}_n$.