Hoja 1

1) Resuelve el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 7 & 11 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Resuelve el sistema con números complejos

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & +ix_3 & = & 0, \\ ix_1 & & +(1+i)x_3 & = & -2-i, \\ & x_2 & +(2+i)x_3 & = & -1-i. \end{array}$$

3) Halla todas las soluciones del sistema

$$\begin{array}{rrrrcl} 3x_1 & -8x_2 & +11x_3 & +x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & -5x_2 & +7x_3 & +x_4 & = & 0, \\ 5x_1 & -13x_2 & +18x_3 & +2x_4 & = & 0. \end{array}$$

Exprésalas, si es posible, como $\vec{x} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2$ donde todas las coordenadas de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son enteras.

4) En un examen pasado de acceso a la universidad se pedía discutir el sistema

$$\begin{array}{ccccc} 2x & +\lambda y & +\lambda z & = & 1-\lambda, \\ x & +y & +(\lambda-1)z & = & -2\lambda, \\ (\lambda-1)x & +y & +z & = & \lambda-1 \end{array}$$

en términos del parámetro real λ. Hazlo con lo aprendido en este curso.

5) Calcular el rango y la forma escalonada reducida para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda-1 & -2\lambda \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

del problema anterior para $\lambda = -1$ y también la última fila de la forma escalonada reducida para el valor no real $\lambda = 1+i$. *Indicación*: Una vez hecho el ejercicio anterior, este se puede resolver con muy pocas cuentas.

6) Halla las inversas de las siguientes matrices compuestas por ceros y unos o explica por qué no son invertibles:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7) Sea a un parámetro real no nulo. Comprueba que el cálculo de la inversa de la siguiente matriz da el mismo resultado con la fórmula para matrices 2×2 que con Gauss-Jordan.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a + a^{-1} & a - a^{-1} \\ a - a^{-1} & a + a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Indicación: No olvides simplificar todo lo que sea necesario.

8) Halla todas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad \text{con} \quad ad - bc = -1$$

tales que coinciden con su inversa. Escribe dos ejemplos, uno con $a, b, c, d \in \mathbb{R} - \{0\}$ y otro con $a, b, c, d \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

9) Considera

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula las inversas de A, B y de AB^{-1}. *Indicación*: Para la última puedes aprovechar cálculos ya hechos.

10) Si A es una matriz que cumple $A^3 = O$ se sabe que $I + 2A$ es siempre invertible y su inversa es de la forma $I + xA + yA^2$. Halla x e y. Si quieres comprobar tu resultado con un ejemplo puedes tomar $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ con todos sus elementos nulos excepto $a_{12} = a_{23} = 1$.