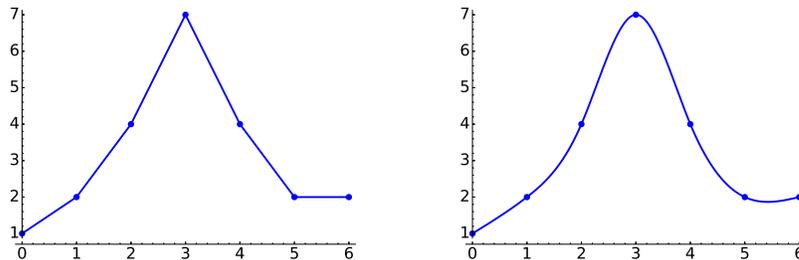


## Aplicando las matemáticas: Sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas lineales aparecen en multitud de modelos y aplicaciones. Su éxito, extensivo a toda el álgebra lineal radica en gran medida en que son simples y computacionalmente tratables.

**Interpolación cúbica.** Seguro que más de una vez te ha surgido la necesidad de conectar unos cuantos puntos para formar una gráfica. Para fijar ideas, digamos que los puntos son  $(0, y_0), (1, y_1), \dots, (n, y_n)$ . Ciertamente, uno puede unirlos sin más con líneas rectas pero el resultado no es demasiado estético. Así, cuando los  $y_j$  son 1, 2, 4, 7, 4, 2, 2 se obtiene el dibujo de la izquierda, mientras que casi todos convendríamos que el de la derecha es más bonito.



Aparte de la estética, obtener uniones suaves es algo que exigen algunas situaciones prácticas. Si usásemos la primera gráfica para construir *frames* de una animación, la veríamos a trompicones. Si la usáramos para representar el movimiento de una partícula física, la velocidad presentaría variaciones bruscas no continuas y la aceleración ni siquiera estaría definida. Tampoco nos vale cualquier curva suave que una los puntos, si presentase muchas oscilaciones también causaría problemas prácticos en los ejemplos citados.

Cabe plantearse el problema matemático de hallar una función con dos derivadas (con aceleración) que une los puntos y tal que cierto promedio de su derivada segunda<sup>1</sup> sea lo menor posible para que no se curve demasiado. Este problema a primera vista parece tener una complejidad enorme. Sin embargo se reduce a resolver un humilde sistema de ecuaciones lineales. Concretamente, el sistema es

$$\begin{cases} 2D_0 + D_1 = 3(y_1 - y_0), \\ D_{j-1} + 4D_j + D_{j+1} = 3(y_{j+1} - y_{j-1}) & \text{para } 0 < j < n, \\ D_{n-1} + 2D_n = 3(y_n - y_{n-1}). \end{cases}$$

Aquí  $D_0, \dots, D_n$  son las  $n + 1$  incógnitas y claramente hay  $n + 1$  ecuaciones. La matriz de coeficientes  $A$  del sistema es una *matriz tridiagonal*, esto significa que  $a_{ij} = 0$  cuando  $|i - j| > 1$ . Si piensas en su aspecto verás la razón del nombre. Los sistemas con este tipo de matrices se resuelven muy rápido usando variantes de la eliminación de Gauss, lo cual suena bastante lógico porque hay muchísimos ceros.

<sup>1</sup>Concretamente, el promedio que se considera es  $\int_0^n |f''|^2$  porque es fácil de tratar con la teoría.

Una vez hallados los  $D_j$ , la función  $f$  buscada que conecta los puntos curvándose lo menos posible, en cierto sentido, es la que en el intervalo  $[j, j + 1]$  está definida por  $f(x) = S_j(x - j)$  donde

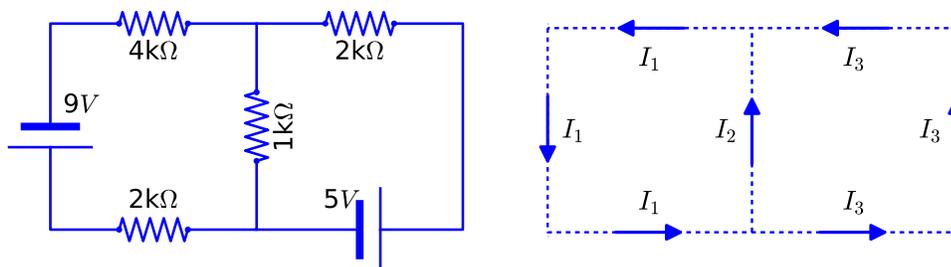
$$S_j(t) = (D_{j+1} + D_j - 2(y_{j+1} - y_j))t^3 + (-D_{j+1} - 2D_j + 3(y_{j+1} - y_j))t^2 + D_j t + y_j.$$

Esta función  $f$  construida a trozos con polinomios de tercer grado, se dice que es un *spline cúbico*. La segunda de las figuras anteriores ha sido dibujada utilizando esta estrategia.

Aunque la fórmula para  $S_j$  sea fea, esconde un razonamiento muy simple. Proviene de imponer que cada trozo de  $f$  en  $[j, j + 1]$  encaje bien con el siguiente, de forma que el resultado tenga dos derivadas. Hay también variantes, menos empleadas, con mayor regularidad [1, §3.7].

**Circuitos y leyes de Kirchhoff.** Según la llamada *analogía hidráulica*, podemos pensar que la intensidad corriente eléctrica es como el flujo de agua, esto es, el volumen que circula por unidad de tiempo, mientras que la diferencia de potencial, el voltaje o tensión, es como la diferencia de presión. Con ello, las *leyes de Kirchhoff* se vuelven bastante naturales: en un nodo la suma de corrientes entrantes y salientes debe coincidir (porque el agua no puede desaparecer) y en un circuito cerrado la suma de las caídas de tensión debe coincidir con la tensión suministrada (sin presión, el agua no sube). En esta analogía, las baterías son las bombas hidráulicas y las resistencias son estrechamientos de las tuberías. La *ley de Ohm*,  $V = IR$ , indica que un mayor estrechamiento aumenta la presión.

Para ver cómo el estudio de las corrientes en un circuito conduce a un sistema lineal, consideremos el representado en la figura de la izquierda:



Convencionalmente, damos a las tres intensidades, posiblemente distintas, los sentidos indicados en el diagrama de la derecha<sup>2</sup>. En la celda izquierda del circuito, las caídas de tensión en las resistencias, empezando por la de abajo, son  $2000I_1$ ,  $1000I_2$  y  $4000I_1$  voltios, con  $I_j$  en amperios. Según la ley de Kirchhoff para las tensiones, deben estar compensadas con los  $9V$  que proporciona la batería, por tanto  $6000I_1 + 1000I_2 = 9$ . De la misma forma, la celda de la derecha del circuito, lleva a  $-1000I_2 + 2000I_3 = 5$ . Por otro lado, la ley de Kirchhoff para las corrientes, aplicada a cualquiera de los dos

<sup>2</sup>En relación con esto, el sentido convencional de la corriente, del polo positivo de una batería al negativo, es en realidad contrario al real, pues las cargas que transmiten la corriente son negativas.

nodos en que se encuentran tres conductores, implica  $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ . Ya tenemos un sistema compatible determinado con tres ecuaciones y tres incógnitas, que en este curso representamos como

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 6000 & 1000 & 0 & 9 \\ 0 & -1000 & 2000 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Resolviéndolo se obtiene el valor buscado de las corrientes:

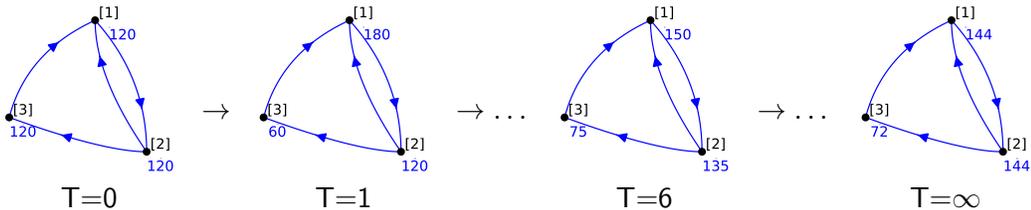
$$I_1 = 1.6 \text{ mA}, \quad I_2 = -0.6 \text{ mA}, \quad I_3 = 2.2 \text{ mA}.$$

El signo negativo de  $I_2$  indica que va en el sentido contrario al que le habíamos asignado.

Si hubiéramos aplicado la ley de corrientes de Kirchhoff a todo el borde del circuito, se habría obtenido la ecuación  $6000I_1 + 2000I_3 = 14$  que es suma de las dos primeras. Si tenemos un circuito muy intrincado, cabe preguntarse cuáles son los caminos que nos dan ecuaciones independientes. Esto está relacionado con un tema avanzado de matemáticas, concretamente de topología algebraica, llamado *homología*. Una pregunta mucho más primaria, y relacionada, es si siempre llegamos a través de las leyes de Kirchhoff a sistemas compatibles determinados. La respuesta es positiva y puede traducirse en la invertibilidad de cierta matriz [3, §12.7].

Si te interesan los aspectos físicos de las leyes de Kirchhoff, su base es la conservación de la carga y la conservación de la energía (o, alternativamente, la ley de Faraday) [5, §22-3]. A pesar de que son aplicables a circuitos que contienen componentes distintos de resistencias y generadores, dejan de funcionar correctamente para corrientes no continuas si las frecuencias son demasiado grandes.

**Paseos aleatorios y clasificación.** Supongamos que tenemos una red en la que en cada nodo todos los caminos son equiprobables. Es decir, en una ciudad con seis carreteras de salida, la sexta parte de los individuos de los vehículos tomarán cada una de ellas. Haciendo unos cuantos experimentos, nos damos cuenta que si la red es suficientemente tupida, a la larga se tiende a una distribución límite. Por ejemplo, partiendo de 360 individuos, 120 por nodo, de la siguiente red en miniatura, tenemos:



En cada paso, indicado con el tiempo discreto  $T$ , todos los del nodo 1 pasan al 2 y todos los del 3 pasan al 1, mientras que los del 2 se reparten al 50% entre los otros vértices. Este proceso no altera la distribución límite, que en la jerga se dice que es estacionaria.

Se llama *matriz de transición*  $P$  a la que tiene como elemento  $p_{ij}$  la proporción de caminos (directos) del nodo  $i$  al nodo  $j$  respecto a todos los que salen del nodo  $i$ . Se puede demostrar que la distribución límite es solución del sistema

$$(P^t - I)\vec{x} = \vec{0}, \quad \sum_i x_i = N$$

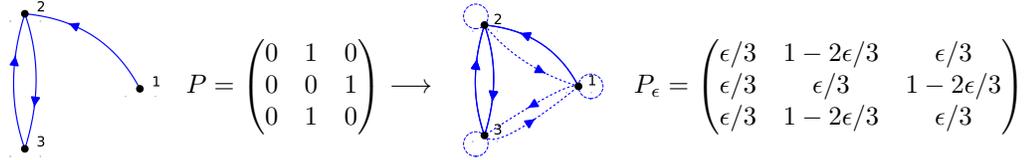
donde  $N$  es el número total de individuos de partida y las incógnitas  $x_j$  indican el número de los que en el límite están en el nodo  $j$ . Se prueba que siempre que haya una distribución límite independiente de la distribución inicial, el sistema es compatible determinado. En el caso anterior,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{da lugar al sistema} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 360 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que su solución es  $x_1 = x_2 = 144$ ,  $x_3 = 72$ .

Si lo pensamos un poco, nos daremos cuenta de que, partiendo de una distribución inicial  $\vec{x}_0$ , en el primer paso,  $T = 1$ , la distribución es  $P^t \vec{x}_0$  y, en general, en el paso  $T = n$  será  $(P^t)^n \vec{x}_0$ . Esto nos da un método iterativo para aproximar las soluciones del sistema de ecuaciones lineales antes indicado. Se conocen métodos numéricos que recogen esta idea fuera del contexto de las redes, para sistemas bastante generales [7]. La gracia de estos métodos aproximados es que permiten trabajar con dimensiones inmensas, fuera del alcance del método exacto de eliminación de Gauss.

Existen redes sin distribución límite, por ejemplo la de la primera figura:



que lleva a una oscilación entre los nodos 2 y 3. Sin embargo, podemos restablecer la existencia de una distribución límite si decretamos que sea posible, con una probabilidad ínfima, “teletransportarse” de un nodo a otro no conectados. El cambio en la matriz de transición  $P \in \mathcal{M}_n$  es de la forma

$$P_\epsilon = (1 - \epsilon)P + \epsilon E \quad \text{donde } E = (e_{ij})_{i,j=1}^n \text{ con } e_{ij} = 1/n \text{ y } \epsilon > 0 \text{ pequeño.}$$

Todo esto está lejos de ser solo un juego matemático. La aplicación de iteraciones de  $P_\epsilon$  en la red que corresponde a la web mundial (*World Wide Web*), con toda su maraña de enlaces, es en esencia el algoritmo *page rank* para clasificar páginas web que está patentado por uno de los creadores de Google (U.S. Patent 6,285,999) e incluso ha dado lugar a una marca registrada. La idea es que las páginas que en la distribución límite tienen mayor número de visitantes deberíamos considerarlas más importantes y ponerlas más arriba en un proceso de búsqueda. Algunas buenas referencias sobre aspectos técnicos y matemáticos del algoritmo son [6], [2] y [4].

A algunos nos resulta inquietante que se pueda patentar una sencilla variación de métodos matemáticos bien conocidos (y muchas veces aplicados) que se remontan a los trabajos de A. Markov de hace más de 100 años.

## Referencias

- [1] K. E. Atkinson. *An introduction to numerical analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, second edition, 1989.
- [2] D Austin. How google finds your needle in the web's haystack. AMS website <http://www.ams.org/featurecolumn/archive/pagerank.html>, 2006.
- [3] P. Bamberg and S. Sternberg. *A course in mathematics for students of physics. Vol. 2*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [4] P. Fernández Gallardo. El secreto de Google y el álgebra lineal. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. SĒMA*, (30):115–141, 2004.
- [5] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 2: Mainly electromagnetism and matter*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1964.
- [6] A. N. Langville and C. D. Meyer. *Google's PageRank and beyond: the science of search engine rankings*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [7] A. Quarteroni and F. Saleri. *Cálculo Científico con MATLAB y Octave*. Springer, Milan, 2007.

Autor: Fernando Chamizo  
Versión: 2024/09/19  
<https://matematicas.uam.es/~fernando.chamizo/>