---

1) [3 puntos] Comprueba que la siguiente matriz tiene inversa para cualquier $x \in \mathbb{R}$. No hace falta que la calcules.

$$A = \begin{pmatrix} 6x & 6x-1 & -9x+6 \\ 2x & 2x & -3x+1 \\ -3x-1 & -3x & 5x-3 \end{pmatrix}.$$

Solución: Por la teoría (capítulo 3) sabemos que A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$. Usando las propiedades de los determinantes:

$$\det(A) \underset{c_1 \mapsto c_1 - c_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 6x-1 & -9x+6 \\ 0 & 2x & -3x+1 \\ -1 & -3x & 5x-3 \end{vmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 + f_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 6x-1 & -9x+6 \\ 0 & 2x & -3x+1 \\ 0 & 3x & -4x+3 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la primera columna, resulta

$$\det(A) = 2x(-4x+3) + (3x-1)^2 = (-8x^2+6x) + (9x^2-6x+1) = x^2+1$$

y $x^2+1 \geq 1$ para $x \in \mathbb{R}$, por tanto no se anula nunca.

---

2) [4=1.25+1.75+1 puntos] Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1-3i & 3+3i \\ 3 & -2+3i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),$$

a) calcula sus autovalores; b) calcula sus autovectores; c) halla D diagonal y C invertible tales que $A = CDC^{-1}$ (no hace falta que compruebes esta relación).

Solución:

a) El polinomio característico $|A - \lambda I|$ es:

$$(1-3i-\lambda)(-2+3i-\lambda) - 9 - 9i = 7 + 9i - (1-3i)\lambda - (-2+3i)\lambda + \lambda^2 - 9 - 9i = \lambda^2 + \lambda - 2,$$

donde se ha usado $(1-3i)(-2+3i) = 7+9i$. Resolviendo $|A - \lambda I| = 0$ se tiene $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$ y se sigue que los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$.

b) Se tiene

$$A-\lambda_1 I = \begin{pmatrix} -3i & 3+3i \\ 3 & -3+3i \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A-\lambda_2 I = \begin{pmatrix} 3-3i & 3+3i \\ 3 & 3i \end{pmatrix}.$$

Los sistemas correspondientes a $(A-\lambda_j I)\vec{x}=\vec{0}$, que se usan para calcular los autovectores, son necesariamente compatibles indeterminados, por tanto podemos descartar una ecuación de cada uno en lugar de aplicar eliminación de Gauss (que sería equivalente). Si en ambos casos nos quedamos con la segunda y tomamos $x_2=\mu$ (la posición no pivote), todos los autovectores son

$$\mu\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu\neq 0, \text{para } \lambda_1=1 \qquad \text{y} \qquad \mu\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mu\neq 0, \text{para } \lambda_2=-2.$$

c) Según la teoría (capítulo 5), como estamos en el caso diagonalizable, porque hay dos autovectores independientes, basta situar los autovalores en la diagonal de D y los autovectores correspondientes en las columnas respectivas de C:

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C=\begin{pmatrix} 1-i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

3) [3 puntos] Halla razonadamente una base ortogonal del subespacio de $\mathbb{R}^3$

$$W=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \,:\, -x_1+2x_2+5x_3=0\}$$

y calcula las coordenadas de $\vec{v}=(9,2,1)^t$ en dicha base.

Solución: Hallamos primero una base aplicando eliminación de Gauss al sistema (en realidad, una sola ecuación) que define W. Las posiciones 2 y 3 no son pivote y escogemos $x_2=\lambda$, $x_3=\mu$, de modo que

$$\vec{x}\in W \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} 2\lambda+5\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}=\lambda\vec{v}_1+\mu\vec{v}_2 \qquad \text{con} \quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$ es una base (no ortogonal) de W. La ortogonalizamos con el proceso de Gram-Schmidt:

$$\vec{u}_1=\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2=\vec{v}_2-\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}-\frac{10}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base ortogonal de W. Las coordenadas de $\vec{v}$ en esta base son

$$\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} = \frac{20}{5} = 4 \qquad \text{y} \qquad \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2} = \frac{6}{6} = 1,$$

donde se han aplicado las fórmulas de la teoría (capítulo 4).

Criterios de corrección

En Moodle hay comentarios personalizados sobre los errores. Tengo en cuenta el aspecto general y la coherencia de cada ejercicio, con lo cual es imposible ser totalmente exhaustivo con los criterios. Indico aquí las penalizaciones más o menos genéricas:

Ejercicio 1.

Saber que la comprobación es equivalente a la de $\det(A) \neq 0$ cuenta un punto y el resto, dos puntos. Este ejercicio es fundamentalmente un cálculo, por eso he sido más duro al penalizar errores en ese sentido.

• No aplicar las propiedades de los determinantes (lo que lleva a muchas cuentas) y cometer un solo error en los cálculos $-1{,}0$.

• Aplicar las propiedades de los determinantes y cometer un solo error en los cálculos $-0{,}5$.

• Incoherencia entre los cálculos y la conclusión $-0{,}5$.

• Pérdida de algún factor en el determinante sin consecuencias en la conclusión $-0{,}25$.

Ejercicio 2.

Las principales penalizaciones provienen de dificultades con los números complejos.

• Dejar un resultado sin operar $-0{,}5$.

• Un solo error simple al despejar números complejos $-0{,}25$.

• Problemas serios con los números complejos $-0{,}75$.

Ejercicio 3.

Algunos no tenéis claro el concepto de coordenada.

• Calcular la proyección ortogonal en lugar de las coordenadas $-0{,}5$. Ambas cosas están relacionadas, pero no son lo mismo. Debería ser evidente que la proyección ortogonal del vector del enunciado es él mismo porque ya pertenece al subespacio.

• Confundir las coordenadas con ellas multiplicada por vectores de la base $-0{,}5$. Cada coordenada es un número, no un vector. Con las coordenadas se puede formar un vector, pero cada uno de ellas es una cantidad escalar.