1) [3+1 puntos] Considera la aplicación lineal $f : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ definida por

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + ix_3 + 3x_4 \\ x_1 + (1+i)x_2 + ix_3 + ix_4 \end{pmatrix}.$$

Calcula una base del núcleo de f y explica por qué f es sobreyectiva.

Solución: Esta aplicación lineal se escribe como

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & 3 \\ 1 & 1+i & i & i \end{pmatrix}.$$

Por definición, $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{x} \,:\, A\vec{x} = \vec{0}\}$ y la teoría asegura que una base se obtiene hallando la solución general por eliminación de Gauss:

$$A \underset{f_2 \mapsto f_2 - f_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & i & 3 \\ 0 & 2+i & 0 & i-3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_3 = \lambda, \; x_4 = \mu \; \text{ (columnas no pivote)}, \\ x_2 = \frac{3-i}{2+i}\mu = \frac{(3-i)(2-i)}{5}\mu = \frac{5-5i}{5}\mu = (1-i)\mu, \\ x_1 = (1-i)\mu - i\lambda - 3\mu = -i\lambda + (-2-i)\mu. \end{cases}$$

Por tanto, los elementos del núcleo son de la forma

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -i\lambda + (-2-i)\mu \\ (1-i)\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \quad \text{con} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2-i \\ 1-i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base de $\operatorname{Ker}(f)$.

Sabemos $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{C}^2$ y $\operatorname{rg}(A) = 2$ (hay dos escalones) implica $\dim \operatorname{Im}(f) = 2 = \dim \mathbb{C}^2$, así pues, $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{C}^2$ y se sigue que f es sobreyectiva.

2) [4 puntos] Dado el conjunto $\{1 + x - 3x^2,\, 1 + (a-3)x^2,\, 3 - a - x^2\}$, halla todos los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que no sea una base de $\mathbb{R}_2[x]$, el espacio de polinomios reales de grado menor o igual que 2.

Solución: El espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$ tiene base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ y por tanto dimensión 3, lo mismo que el número de elementos del conjunto del enunciado. Por tanto es base si y solo si dichos elementos, digamos P_1, P_2 y P_3, son linealmente independientes. Es decir, tenemos que hallar para qué valores de a hay soluciones distintas de $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ de la ecuación $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_1 P_2 = 0$. Para que un polinomio sea idénticamente nulo todos sus coeficientes deben ser nulos. examinando los términos independientes, los de x y los x^2 se llega al sistema:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + (3-a)\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \\ -3\lambda_1 + (a-3)\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{cuya matriz es} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-a \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & a-3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando eliminación de Gauss

$$A \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 + 3f_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-a \\ 0 & -1 & a-3 \\ 0 & a & 8-3a \end{pmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 + af_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-a \\ 0 & -1 & a-3 \\ 0 & 0 & a^2-6a+8 \end{pmatrix}.$$

Si queremos que no hay solución única (la trivial) debemos imponer que $\text{rg}(A) < 3$ y esto equivale a $a^2 - 6a + 8 = 0$. Resolviendo la ecuación de segundo grado se sigue que para $a = 2$ y para $a = 4$ son linealmente dependientes y no forman una base (y solo en esos casos).

---

3) [$2 = 1 + 1$ puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo una breve justificación.

- V. ☐ F. ■ $V = \{P \in \mathbb{R}_2[x] \,:\, P(0)P(1) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}_2[x]$.
  Justificación: Por ejemplo $P_1 = x^2 + x$ está en V, porque $P_1(0) = 0$, y $P_2 = x - 1$ también, porque $P_2(1) = 0$. Sin embargo, su suma $S = x^2 + 2x - 1$ no lo está porque $S(0)S(1) \neq 0$.
- V. ☐ F. ■ Todas las matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ invertibles satisfacen $A \neq -A^{-1}$.
  Justificación: Hay infinidad de matrices que cumplen $A = -A^{-1}$. Una de las más sencillas es $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si te preguntas cómo se te pueden ocurrir estas respuestas. Aquí van algunas indicaciones:

- Cuando uno intenta ver si $P_1, P_2 \in V$ implica $\lambda P_1 + \mu P_2 \in V$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le sobra un término. Basta buscar un ejemplo en el que ese término sea no nulo.
  Otra forma: V son los polinomios que se anulan en 0 o en 1. Si sumas un polinomio que se anula solo en 0 con otro que solo se anula en 1, el resultado no se anulará en ninguno de los dos.
- Quizá lo más simple sea usar que $A = -A^{-1}$ equivale a $A^2 = I$. Escribiendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ esto lleva a las ecuaciones $a^2 + bc = -1$, $b(a+d) = 0$, $c(a+d) = 0$ y $bc + d^2 = -1$. Basta buscar a, b, c y d que las cumplan, por ejemplo, tomando $a = -d$, para que se verifiquen las de en medio, dando un valor arbitrario no nulo a b y despejando c.

Criterios de corrección

En Moodle he puesto comentarios sobre algunos de los errores. Tengo en cuenta el aspecto general y la coherencia de cada ejercicio, con lo cual es imposible ser totalmente exhaustivo con los criterios. Indico las penalizaciones más o menos genéricas:

Ejercicio 1.
• Error simple al aplicar eliminación de Gauss $-0{,}5$.
• Problemas al operar con números complejos o no operarlos $-0{,}5$.
• Error leve de cuentas $-0{,}25$ (fuera de Gauss).

Ejercicio 2.
• Error simple al aplicar eliminación de Gauss $-0{,}5$.
• Error al trasladar el enunciado a la matriz, de $-0{,}25$ a $-0{,}5$, dependiendo de la lógica de lo de después y de la naturaleza del error.
• Error leve de cuentas $-0{,}25$ (fuera de Gauss).
• No penalizo no explicar por qué es suficiente ver la independencia lineal, aunque, sinceramente, lo he dudado. Quizá para algunos sea tan obvio que $\mathbb{R}_2[x]$ tiene dimensión 3 coincidente con el número de elementos del conjunto que no lo han reflejado en la solución. Desde mi punto de vista, aunque esto no requiera ningún cálculo, merecía la pena mencionarlo.

Ejercicio 3.
• Un acierto sin explicación con algún sentido, no cuenta nada.
• La explicación prima sobre lo que se marque.
• Una cuestión de lógica: No se prueba una afirmación general dando un ejemplo particular. Si uno piensa que es verdadera debe dar razones para ello. No se puede concluir que es cierto que todos los españoles son morenos porque mi primo y yo lo somos (ejemplos). Sí se puede demostrar que es falso comprobando que mi sobrino es rubio (contraejemplo).
• En a) algunos llegáis a que si fuera subespacio, debería cumplirse $P(0)Q(1)+P(1)Q(0) = 0$ para $P, Q \in V$ y decís que no se cumple. Para estar seguro de que realmente no se cumple hay que mencionar dos polinomios de V adecuados (unos lo cumplen y otros no). Si no se hace, pongo hasta 0,5.
• En b) algunos decís que es falso y dais un contraejemplo a través de la fórmula de la inversa, pero la escribís mal. Si es coherente y el error en la fórmula no es muy serio, doy hasta 0,5.