$\boxed{\text{Parcial 1 de prueba}}$

1) [4 puntos] Halla una base de

$$\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

y calcula las coordenadas de $(0,1,3,1)^t$ en esa base.

Solución: Aplicando reducción de Gauss al sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -5 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - 2f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 3f_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 - \frac{2}{3} f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La dimensión del espacio es $4 - 2$. Las columnas no pivote son la segunda y la cuarta, así que tomamos $x_2 = \lambda$ y $x_4 = \mu$. Despejando, $x_3 = 3\mu$ y $x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4 = -\lambda + \mu$. Por tanto,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\lambda + \mu \\ \lambda \\ 3\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \qquad \text{con} \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se sigue que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base. Para hallar las coordenadas λ y μ del vector $\vec{w}$ del enunciado hay que resolver $\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = \vec{w}$. Es muy fácil hacerlo a ojo. Mediante eliminación de Gauss sería:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

2) [4 puntos] Decide cuál es la matriz del endomorfismo $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ dado por $f(P) = P(0) + 2P'(1) + P(1)x + P(2)x^2$ cuando se emplea la base $\{1, x, x^2\}$ y halla $\dim \operatorname{Im}(f)$.

Nota: $\mathbb{R}_2[x]$ indica los polinomios reales de grado menor o igual que 2 y P' la derivada. Así, $P'(1)$ es la derivada evaluada en 1.

Solución: Calculamos las imágenes de los elementos de $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$:

$$f(1) = 1 + x + x^2, \qquad f(x) = 2 + x + 2x^2, \qquad f(x^2) = 4 + x + 4x^2.$$

Las coordenadas de estos vectores en la base $\mathcal{B}$ conforman las columnas de la matriz A buscada. Esto es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y con un paso de Gauss} \quad A \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - f_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rg}(A) = 2$.

---

3) [$2 = 1 + 1$ puntos] Señala si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas incluyendo una breve justificación.

- V. ■ F. □ Ninguna aplicación lineal $f : \mathbb{C}^{2025} \longrightarrow \mathbb{C}^{2024}$ es inyectiva.

  Justificación: La matriz A de f pertenece a $\mathcal{M}_{2024\times 2025}(\mathbb{C})$, por tanto, $\operatorname{rg}(A) \leq 2024$ y $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2025 - \operatorname{rg}(A) \geq 1$. Así que no puede darse $\operatorname{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

- V. ■ F. □ Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes, $\vec{v} + \vec{w}$ y $\vec{w}$ también lo son.

  Justificación: $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) + \mu\vec{w} = \vec{0}$ equivale a $\lambda\vec{v} + (\lambda + \mu)\vec{w} = \vec{0}$ y si λ y $\lambda + \mu$ no son simultáneamente nulos, λ y μ tampoco lo son.