Universidad Autónoma de Madrid

Segundo parcial de Matemáticas 1, primer curso del Grado en Ingeniería Biomédica.
20 de diciembre de 2023.

Escribe **cuidadosamente** la respuesta: presenta una solución razonada y justificada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

---

1. (2 puntos) Considera la siguiente matriz. Su núcleo contiene el vector (columna) $(1, 1, -2, -1)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcula el rango de A.

Solución. Por el teorema del rango-nulidad,

$$\mathrm{rk}(A) + \dim N(A) = 4.$$

Podemos encontrar dos vectores independientes (es decir, no proporcionales) en el núcleo:

$$(1, 1, -2, 1)^t \text{ y } (1, 0, 0, 0)^t.$$

Por tanto, $\dim N(A) \geq 2$. El rango de A es al menos 2, porque tiene menores 2×2 no nulos, por ejemplo $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$. Como $\dim N(A)$y $\mathrm{rk}(A)$ son ambos al menos 2 y suman 4, ambos son iguales a 2. □

(b) Encuentra una base del núcleo de A.

Solución. Ya hemos visto que $\dim N(A) = 2$, por tanto la base tendrá 2 vectores. Ya tenemos dos vectores en el núcleo, y son independientes, así que forman una base:

$$\left\{(1, 1, -2, 1)^t, (1, 0, 0, 0)^t\right\}$$

□

(c) Encuentra una base de la imagen de A.

Solución. Como $\mathrm{rk}(A) = 2$, necesitamos 2 vectores independientes, es decir, no proporcionales, del espacio que generan las columnas de A. Por ejemplo,

$$\left\{(3, -3, 4)^t, (1, -2, -3)^t\right\}.$$

□

2. Considera los vectores

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Sea $W = \mathrm{span}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ el espacio que generan.

(a) Calcula la dimensión de W.

Solución. La dimensión de W es el rango de esta matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tiene determinante $15 - 18 + 3 - 6 + 15 - 9 = 0$, por lo que $\mathrm{rk}(A) \leq 2$. por otro lado, tiene un menor 2×2 no nulo, por lo que $\mathrm{rk}(A) \geq 2$: $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$. Entonces, $\dim(W) = 2$. □

(b) ¿Es $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de W? Si no, encuentra una base de W.

Solución. No es una base, porque son 3 vectores y $\dim(W) = 2$. Si cogemos 2 de ellos, por ejemplo, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, vemos que son independientes al no ser proporcionales, y son 2, así que forman una base. $\square$

(c) ¿Es $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$?

Solución. No, porque $\mathcal{B}$ genera W, que tiene dimensión 2 y por tanto no es todo $\mathbb{R}^3$, que tiene dimensión 3. $\square$

Solución. No, porque hemos visto que son dependientes: la matriz A tiene rango 2. $\square$

3. (3 puntos) Considera la siguiente matriz.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) (1 puntos) Sea f la aplicación lineal $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tiene matriz B respecto de la base estándar de $\mathbb{R}^3$. Encuentra la matriz de f respecto de esta base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$$

Solución. La solución es

$$C_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3} \to \mathcal{B}} \cdot B \cdot C_{\mathcal{B} \to \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}}.$$

Tenemos que

$$C_{\mathcal{B} \to \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $C_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3} \to \mathcal{B}} = C^{-1}_{\mathcal{B} \to \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}}$, tenemos que calcular su inversa. Lo voy a hacer por eliminación:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 \to f_3 + f_2]{f_1 \to f_1 - f_2}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \to f_1 + f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Así que la respuesta es

$$C_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3} \to \mathcal{B}} \cdot B \cdot C_{\mathcal{B} \to \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que la matriz casi es diagonal: el segundo y tercer vector que nos han dado son autovectores, con autovalores 1 y 0, respectivamente. $\square$

(b) (1,5 puntos) Encuentra, si existe, una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual B sea diagonal. Si no existe, justifica por qué no.

Solución. Calculamos el polinomio característico de B:

$$\det(B-\lambda \mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} \overset{1^{\text{a}}\text{ fila}}{=} (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\left((-1-\lambda)(2-\lambda)+2\right) = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^2.$$

Por tanto, los autovalores son 0 y 1. Tenemos que encontrar 3 autovectores independientes para que B sea diagonalizable.

Con autovalor 0, ya nos han dado un autovector: $(0,-1,1)^t$.

Con autovalor 1, nos han dado un autovector: $(1,1,-1)^t$. Esperamos encontrar otro (porque 1 es una raíz doble del polinomio característico). Será otro vector del núcleo de

$$B - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene rango 1 así que sí tiene dos autovectores independientes. Otro autovector independiente es $(1,0,1)^t$. Por tanto, una base posible es

$$\{(1,0,1)^t, (1,1,-1)^t, (0,-1,1)^t\}.$$

□

(c) (0,5 puntos) Encuentra, si existe, una matriz D tal que $D^{-1}BD$ sea diagonal. Si no existe, justifica por qué no.

Solución. D tendrá que ser una matriz cuyas columnas sean una base de autovectores:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

4. (2 puntos) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

(a) Si una matriz A tiene algunos menores 2×2 nulos y otros no nulos, entonces su rango es al menos 2.

Solución. Verdadero. Hemos visto en clase que si A tiene algún menor 2×2 no nulo, su rango es al menos 2. □

(b) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Solución. Falso. Su polinomio característico es $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$, y por tanto su único autovalor es 1. Sus autovectores son los vectores del núcleo de $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, y esta matriz tiene rango 1, así que sólo hay un autovector independiente, y no 2. □

(c) La aplicación $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ es lineal.

Solución. Verdadero: para dos vectores $(x_1,y_1,z_1)^t, (x_2,y_2,z_2)^t$ y dos números reales α,β,

$$f\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta x_2 \\ \alpha y_1+\beta y_2 \\ \alpha z_1+\beta z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1+\beta x_2 \\ \alpha x_1+\beta x_2 \end{pmatrix};$$

$$\alpha f\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+\beta f\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}x_2\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta x_2\\\alpha x_1+\beta x_2\end{pmatrix}.$$

□

Solución 2.

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

La aplicación es la multiplicación por una matriz, así que es lineal. □

(d) Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $l \times m$, las columnas de BA son combinaciones lineales de las columnas de A.

Solución. Falso. Para empezar, las columnas de A tienen m entradas, y las de BA tienen l entradas, y no tiene por qué ser $m = l$. Aunque fuera $m = l$, podemos tener:

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},$$

y $(0,1)^t$ no es dependiente de $(1,0)^t$. □