Universidad Autónoma de Madrid

Segundo parcial de Matemáticas 1, primer curso del Grado en Ingeniería Biomédica.
20 de diciembre de 2023.

Escribe **cuidadosamente** la respuesta: presenta una solución razonada y justificada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

---

1. (2 puntos) Considera la siguiente matriz. Su núcleo contiene el vector (columna) $(1, 1, -2, -1)^t$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcula el rango de A.

   (b) Encuentra una base del núcleo de A.

   (c) Encuentra una base de la imagen de A.

2. Considera los vectores

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

   Sea $W = \operatorname{span}\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ el espacio que generan.

   (a) Calcula la dimensión de W.

   (b) ¿Es $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de W? Si no, encuentra una base de W.

   (c) ¿Es $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$?

3. (3 puntos) Considera la siguiente matriz.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) (1 puntos) Sea f la aplicación lineal $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tiene matriz B respecto de la base estándar de $\mathbb{R}^3$. Encuentra la matriz de f respecto de esta base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$$

   (b) (1,5 puntos) Encuentra, si existe, una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual B sea diagonal. Si no existe, justifica por qué no.

   (c) (0,5 puntos) Encuentra, si existe, una matriz D tal que $D^{-1}BD$ sea diagonal. Si no existe, justifica por qué no.

4. (2 puntos) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

   (a) Si una matriz A tiene algunos menores 2×2 nulos y otros no nulos, entonces su rango es al menos 2.

   (b) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

   (c) La aplicación $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ es lineal.

   (d) Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $l \times m$, las columnas de BA son combinaciones lineales de las columnas de A.