Universidad Autónoma de Madrid

Segundo parcial de matemáticas 1, primer curso del Grado en Ingeniería Biomédica. 14 de diciembre de 2022.

Se pide escribir cuidadosamente la respuesta: presenta una solución razonada y justificada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

Si en un problema cometes un error por el que perder x puntos, pero explicas por qué sabes que está mal aunque no encuentres el error, recuperarás $x/2$ puntos.

---

1. (3 puntos) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta (en este y todos los problemas).

   (a) Si $A = CF$, donde C es una columna $m \times 1$ y F es una fila $1 \times n$, entonces $\operatorname{rk}(A) \le 1$.

   Solución. Es verdadero. Una columna tiene rango como mucho 1, y sabemos (por las hojas) que el rango de CF es menor o igual que el rango de C y también que el rango de F. □

   (b) Si A es una matriz $m \times n$ de rango m, entonces para cualquier vector columna b de tamaño $m \times 1$, el sistema $Ax = b$ es compatible.

   Solución. Es verdadero. La matriz extendida $(A|b)$ del sistema tiene rango $\le m$, que es el número de filas, por tanto, $\operatorname{rk}(A) = m \ge \operatorname{rk}(A|b)$ (y es inmediato que $\operatorname{rk}(A) \le \operatorname{rk}(A|b)$). Por el teorema de Rouché-Frobenius, es compatible. □

   (c) Si A y B son matrices que cumplen que $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

   Solución. Es falso:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (0).$$

   □

   (d) Si A es una matriz cuadrada y B se obtiene a partir de A haciendo operaciones elementales en las filas de A, entonces A y B tienen los mismos autovalores.

   Solución. Es falso: por ejemplo, estas dos matrices:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \mapsto 2f_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   La segunda se obtiene de la primera multiplicando una fila por 2. Sin embargo, los autovalores de la primera son $\{1\}$ y los de la segunda son $\{1, 2\}$ (al ser triangulares, son los números en la diagonal). □

   (e) Las funciones $\{e^x, x, 1\}$ son linealmente independientes.

   Solución. Es verdadero. El determinante Wronskiano no es idénticamente 0, así que son independientes:

   $$\det \begin{pmatrix} e^x & x & 1 \\ e^x & 1 & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix} = -e^x.$$

   □

2. (2 puntos) Considera la aplicación $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

   $$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

   (a) Demuestra que f es lineal.

   Solución. Observamos que

   $$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   Sabemos que la multiplicación por una matriz es lineal, por tanto f es lineal.

   □

(b) Encuentra la matriz de f en las bases estándar de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Solución. La hemos encontrado en el apartado anterior. $\square$

(c) Demuestra que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución. Es una base porque es un conjunto ortonormal y tiene $3 = \dim \mathbb{R}^3$ elementos. Comprobamos que es ortonormal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{32} \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{32} \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

(d) Encuentra las coordenadas de $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la base B.

Solución. Como B es ortonormal, las coordenadas son $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2. \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

3. (3 puntos) Considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en la base estándar.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Demuestra que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Solución. Son 3 vectores, que es la dimensión de $\mathbb{R}^3$. Por tanto, basta que sean linealmente independientes. Como el determinante que forman es distinto de 0, lo son:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -1.$$

$\square$

(b) Encuentra la matriz de f respecto de la base B.

Solución. Si llamamos M a la matriz del apartado anterior, la matriz que buscamos es $M^{-1}AM$. Encontramos la inversa por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 + f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

La matriz que buscamos es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Observamos que nos sale una matriz triangular: como representa la misma f en otra base, tiene los mismos autovectores (salvo el cambio de coordenadas), así que los autovectores tienen que ser 1 y -1. Además, observamos que el vector con coordenadas $(1,0,0)$ en esta base es un autovector con autovalor 1. En la base estándar tiene coordenadas $(1,0,-1)$.

(c) Encuentra una matriz C tal que $C^{-1}AC$ sea diagonal.

Solución. Ya sabemos que los autovalores son 1 y -1. El polinomio característico tiene que ser $(1-\lambda)(-\lambda-1)^2$:

$$\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 & -4-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} == (-1-\lambda)\left((-3-\lambda)(3-\lambda)+8\right) =$$

$$= (-1-\lambda)(\lambda^2-9+8) = (-1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Los autovectores con autovalor 1 son la soluciones de:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene rango ≥ 2 (el determinante de las dos primeras filas y columnas es $8 \neq 0$, por tanto su núcleo tiene dimensión ≤ 1. Ya tenemos un vector del núcleo: $(1,0,-1)$, así que no tenemos que encontrar más.

Los autovectores con autovalor -1 son la soluciones de:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene rango 1: las dos ecuaciones no nulas son proporcionales, así que el sistema es:

$$-2x+4y-4z=0 \Leftrightarrow x-2y+2z=0$$

Al tener rango 1, el núcleo tiene dimensión 2 y obtenemos una base dando pares de valores independientes a (y,z), como por ejemplo $y=1, z=0$ y $y=0, z=1$. Obtenemos los vectores:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos 3 autovectores, y son linealmente independientes (los dos últimos forman una matriz identidad 2×2, y el tercero tiene autovalor distinto, así que es independiente de los dos primers). Por tanto, la matriz que los tiene en columnas es una matriz que nos sirve:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

4. (2 puntos) Considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentra una base de la imagen de f.

Solución. La imagen de f está generada por las imágenes de los 4 vectores de la base estándar de R^4, que son los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Son todos múltiplos de $\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$, que nos vale como base. □

(b) Encuentra una base ortonormal del núcleo de f.

Solución. El núcleo de f son los vectores con coordenadas (x, y, z, w) que cumplen que $x + y + z = 0$ (la segunda ecuación es -2 veces la primera). Se puede despejar x en función de y, z, w y obtenemos una base que no es ortonormal: (tienen que ser 3 vectores porque el rango de las ecuaciones es 1)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Aplicamos el método de Gram-Schmidt: El primer vector ya tiene normal 1, y el segundo ya es perpendicular al primero. Lo dividimos por su norma para obtener:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando la fórmula obtenemos el tercer vector perpendicular a los anteriores:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 - \frac{1}{2}(1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Podemos multiplicar por cualquier número, como 2, para quitar los denominadores ($(-1, -1, 2, 0)$ seguirá siendo perpendicular), y luego dividimos por la norma, que es $\sqrt{6}$. Tenemos la base ortonormal:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$