Universidad Autónoma de Madrid

Segundo parcial de matemáticas 1, primer curso del Grado en Ingeniería Biomédica. 14 de diciembre de 2022.

Se pide escribir cuidadosamente la respuesta: presenta una solución razonada y justificada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

Si en un problema cometes un error por el que perder x puntos, pero explicas por qué sabes que está mal aunque no encuentres el error, recuperarás $x/2$ puntos.

---

1. (3 puntos) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta (en este y todos los problemas).
   (a) Si $A = CF$, donde C es una columna $m \times 1$ y F es una fila $1 \times n$, entonces $\mathrm{rk}(A) \leq 1$.
   (b) Si A es una matriz $m \times n$ de rango m, entonces para cualquier vector columna b de tamaño $m \times 1$, el sistema $Ax = b$ es compatible.
   (c) Si A y B son matrices que cumplen que $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.
   (d) Si A es una matriz cuadrada y B se obtiene a partir de A haciendo operaciones elementales en las filas de A, entonces A y B tienen los mismos autovalores.
   (e) Las funciones $\{e^x, x, 1\}$ son linealmente independientes.

2. (2 puntos) Considera la aplicación $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$
   (a) Demuestra que f es lineal.
   (b) Encuentra la matriz de f en las bases estándar de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
   (c) Demuestra que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
   (d) Encuentra las coordenadas de $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en la base B.

3. (3 puntos) Considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en la base estándar.
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$
   (a) Demuestra que $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Encuentra la matriz de f respecto de la base B.
   (c) Encuentra una matriz C tal que $C^{-1}AC$ sea diagonal.

4. (2 puntos) Considera la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Encuentra una base de la imagen de f.
   (b) Encuentra una base ortonormal del núcleo de f.