# Universidad Autónoma de Madrid

Primer parcial de Matemáticas 1, primer curso del Grado en Ingeniería Biomédica.
18 de octubre de 2023.

---

Escribe **cuidadosamente** la respuesta: presenta una solución razonada y justificada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

---

1. (2 puntos) Calcula este determinante:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

*Solución.* La manera que me parece más fácil (no la única) es hacer operaciones en las filas:

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1\end{pmatrix} \overset{f_2\to \underline{f_2}-f_1}{=} \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1\end{pmatrix} \overset{f_3\to \underline{f_3}+f_2}{=} \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$$

Desarrollando por la fila 3, tenemos que nuestro determinante es igual a

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2\cdot 5 = 10.$$

$\square$

2. Resuelve los sistemas en función de los parámetros ($a$, $b$ y $c$ para el primero y $a$ y $b$ para el segundo):

   (a) (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & +z & = & a\\ -4x & -3y & -z & = & b\\ 2x & +2y & +z & = & c\end{array}\right\}$$

*Solución.* No hay parámetros en los coeficientes:

$$\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -4 & -3 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix} \overset{f_3\to \underline{f_3}-f_1}{=} \det\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -4 & -3 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = -4+2 = -2 \neq 0.$$

Podemos usar la regla de Cramer, para cualquier $a, b, c$, ya que el determinante nunca es 0 (y por tanto el sistema es siempre compatible determinado):

$$x = \frac{1}{-2}\det\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ b & -3 & -1\\ c & 2 & 1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(-a+b+2c) \qquad = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - c$$

$$y = \frac{1}{-2}\det\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ -4 & b & -1\\ 2 & c & 1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(2a-2c) \qquad = -a+c$$

$$z = \frac{1}{-2}\det\begin{pmatrix}2 & 1 & a\\ -4 & -3 & b\\ 2 & 2 & c\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(-2a-2b-2c) \qquad = a+b+c$$

Deberíamos comprobar que no nos hemos equivocado en las cuentas, al menos alguna de ellas:

$$2x + y + z = 2\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - c\right) + (-a + c) + (a + b + c) = a\checkmark$$

$\square$

(b) (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{rrrcr} ax & +ay & +az & = & 1 \\ bx & +by & +bz & = & 2 \\ x & +y & +z & = & 3 \end{array}\right\}$$

*Solución.* Restando $a$ veces la fila 3 de la fila 1, y restando $b$ veces la fila 2 de la fila 1, tenemos el sistema equivalente que tiene esta matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1-3a \\ 0 & 0 & 0 & 2-3b \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible a no ser que $a = 1/3$ y $b = 2/3$. Si $a = 1/3$ y $b = 2/3$, entonces el sistema es la ecuación $x + y + z = 3$, que es compatible indeterminado, y tiene soluciones

$$(3 - \lambda - \mu, \lambda, \mu)$$

para cualesquiera números $\lambda$ y $\mu$. $\square$

3. (2 puntos) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta (en este y todos los problemas).

(a) Si $A$ y $B$ son matrices cuadradas **del mismo tamaño**, $\det(A) = 1$ y $\det(B) = 2$, entonces hay una serie de operaciones elementales en las filas de $A$ que la transforman en $B$.

*Solución.* Verdadero. Si el determinante de una matriz cuadrada no es 0, sabemos que es invertible, y que por tanto hay una serie de operaciones en las filas que la transforman en la identidad. Entonces, podemos pasar de $A$ a $I$ y de $I$ a $B$. $\square$

(b) Si una matriz $A$ tiene más filas que columnas, entonces no hay ninguna columna $b$ para la que el sistema $Ax = b$ sea compatible indeterminado.

*Solución.* Falso. Por ejemplo, cualquiera de estos sistemas.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\square$

(c) Si $A$ y $B$ son dos matrices del mismo tamaño tales que los sistemas $Ax = 0$ y $Bx = 0$ son equivalentes, y $A$ es escalonada, entonces $B$ también lo es.

*Solución.* Falso: Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ambos sistemas sólo tienen la solución $(0, 0)$. $\square$

(d) Si $A$ es una matriz cuadrada con determinante 0, entonces el sistema $Ax = 0$ es compatible indeterminado.

*Solución.* Verdadero: $x = 0$ (el vector columna) siempre es una solución, así que el sistema es compatible. Si fuera determinado, la matriz tendría que ser invertible (lo hemos visto en clase) y tendría determinante $\neq 0$, así que tiene que ser indeterminado. $\square$

(e)

$$\det\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}=-1$$

*Solución.* Falso: El determinante es 1. Si intercambiamos la fila 1 con la 4 y la 2 con la 3, el determinante cambia de signo 2 veces, es decir, se queda igual, y tenemos la matriz $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, que es triangular y tiene determinante 1. □

4. (2 puntos) Explica todos los errores en estos razonamientos y calcula el determinante correctamente:

$$\det\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\overset{(a)}{=}\det\begin{pmatrix}0&0&1\\2&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\overset{(b)}{=}\det\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}=2\cdot(-1)-2\cdot1=-4$$

$$\det\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\overset{(c)}{=}\det\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}\overset{(d)}{=}-2\cdot\det\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}=-2\cdot(1\cdot1-2\cdot1)=2$$

(a) Reemplazar la fila 1 por 2 veces la fila 1 menos la fila 2.

(b) Desarrollar por la fila 1.

(c) Reemplazar la columna 2 por la columna 2 menos la columna 1.

(d) Desarrollar por la columna 2.

*Solución.* El paso $(a)$ está mal: esto son **dos** operaciones elementales: primero multiplicar la fila 1 por 2, y después restar la fila 2. La primera hace que el determinante se multiplique por 2, así que habría que escribir $\frac{1}{2}$ para que sea verdad la igualdad.

$$\det\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\overset{(a)}{=}\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}0&0&1\\2&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\overset{(b)}{=}\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(2\cdot(-1)-2\cdot1)=-2$$

El paso $(d)$ también está mal: al desarrollar el determinante, a la fila 3, columna 2 le corresponde tener un signo "$-$":

$$\det\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\overset{(c)}{=}\det\begin{pmatrix}1&0&1\\2&0&1\\1&-2&0\end{pmatrix}\overset{(d)}{=}-\left(-2\cdot\det\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\right)=+2\cdot(1\cdot1-2\cdot1)=-2$$

□