Universidad Autónoma de Madrid

Primer parcial de Matemáticas 1, primer curso del Grado en Ingeniería Biomédica.
19 de octubre de 2022.

Apellidos .... Nombre ....

Se pide escribir **cuidadosamente** la respuesta: presenta una solución razonada y justificada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

---

1. (2 puntos) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta (en este y todos los problemas).

   (a) Si A es una matriz, b es un vector columna y el sistema $Ax = b$ es compatible, entonces para cualquier otro vector columna b' el sistema $Ax = b'$ también es compatible.

   Solución. Esto es falso. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, el sistema es compatible si $b = (1,1)$, e imcomatible si $b' = (1,0)$. Valdría incluso $A = (0)$, $b = (0)$ y $b' = (1)$. □

   (b) Para cualesquiera dos matrices cuadradas del mismo tamaño A y B, $\det(AB) = \det(BA)$.

   Solución. Esto es verdadero.

   $$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA).$$

   En el segundo paso hemos usado que la multiplicación **de números** es conmutativa. □

   (c) Si de una matriz A se puede llegar a otra matriz B haciendo operaciones elementales por filas, y c es un vector columna que cumple que $Ac = 0$, entonces $Bc = 0$.

   Solución. Esto es verdadero. Si de A se puede llegar a B haciendo operaciones en las filas, hay alguna matriz (invertible incluso) C para la que $B = CA$. Entonces, $Bc = C(Ac) = C \cdot 0 = 0$. □

   (d) Si A es una matriz $n \times m$ y v, w son dos vectores $m \times 1$ que cumplen que $Av = Aw = 0$, entonces cualquier vector u de $\langle v, w \rangle$, $Au = 0$.

   Solución. Es verdadero, Si u está en $\langle v, w \rangle$, entonces $u = av + bw$ para algunos números a y b. Entonces,

   $$Au = A(av + bw) = aAv + bAw = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0.$$

   □

2. (2 puntos) Calcula la inversa de esta matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución. Por eliminación: empezamos por

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Restamos la primera fila de la segunda:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Multiplicamos la segunda fila por $1/2$, se la sumamos a la primera y se la restamos a la tercera:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Restamos la tercera fila de la cuarta:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

La inversa es

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

3. (2 puntos) Calcula el núcleo de esta matriz, es decir, da un sistema generador o una parametrización de todos los elementos del núcleo.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

Solución. Haciendo operaciones elementales en las filas el núcleo no cambia. Intercambiamos las dos primeras filas, y restamos la (ahora) primera fila de las demás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la segunda fila por -1 y sumamos el triple de la segunda a la tercera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Sumamos 2 veces la tercera a la segunda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas que quedan libres son la tercera y la quinta, es decir, la solución general es

$$(-a-b, 16b, a, 8b, b).$$

O el espacio generado por $(-1,0,1,0,0)$ y $(-1,16,0,8,1)$. □

4. (2 puntos)

   (a) ¿Es la gráfica de $y = x^3$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?

   Solución. No: $(1,1)$ está en la gráfica y $(2,2)$ no, por $2 \neq 2^3$. □

   (b) Si A y B son dos matrices con 3 columnas. ¿Es la unión de los núcleos de A y B un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? ¿Y la intersección?

   Solución. La unión no es un subespacio. Por ejemplo, si $A = (1,0,0)$ y $B = (0,1,0)$, $(0,1,0)$ está en el núcleo de A y $(1,0,0)$ está en el núcleo de B, por lo que ambos están en la unión. Sin embargo, la suma $(1,1,0)$ no está en el núcleo de A ni de B, así que la unión no tiene por qué ser cerrada para la suma.

   La intersección sí es un subespacio. Es el núcleo de $\begin{pmatrix} A \\ \hline B \end{pmatrix}$. □

5. (2 puntos) Resuelve el sistema en función del parámetro λ:

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x & +\lambda y & -z & = & 2\lambda \\ & y & +z & = & \lambda+2 \\ -x & +(2-\lambda)y & +4z & = & \lambda+4 \end{array}\right\}$$

Solución. Sumamos la primera ecuación a la tercera, y escribimos la matriz del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 2 & 3 & 3\lambda+4 \end{array}\right)$$

Con la matriz adjunta, sé que la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Sé que si multiplico por esta matriz las dos últimas filas me van a quedar sistemas equivalentes (al ser invertible, es alguna secuencia de operaciones elementales):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & -1 & 2\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

Sumamos a la primera fila $-\lambda$ veces la segunda y la tercera

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

Para todo λ, el sistema es compatible determinado y la solución es $(\lambda, 2, \lambda)$. $\square$