Universidad Autónoma de Madrid

Examen final de Matemáticas 1, primer curso del Grado en Ingeniería Biomédica.
17 de enero de 2024.

Escribe **cuidadosamente** la respuesta: presenta una solución razonada y justificada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

---

1. (1,5 puntos) Decide si el siguiente sistema es compatible o incompatible, y si es determinado o indeterminado, en función de los parámetros a y b.

$$\begin{array}{rrrcl} x & +ay & +az & = & a \\ x & +ay & +z & = & b \\ & y & +z & = & a \end{array}$$

Solución. Podemos restar la primera ecuación de la segunda:

$$\begin{array}{rrrcl} x & +ay & +az & = & a \\ & & (1-a)z & = & b-a \\ & y & +z & = & a \end{array}$$

Ahora podemos distinguir dos casos:

Caso 1: $a = 1$. En este caso la segunda ecuación es $0 = b - 1$. Si $b \neq 1$, el sistema es incompatible. Si $b = 1$, el sistema es el siguiente, ignorando la ecuación $0 = 0$:

$$\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 1 \\ & y & +z & = & 1 \end{array}$$

Restando la segunda ecuación de la primera, tenemos el siguiente sistema escalonado reducido, que es compatible indeterminado (z puede ser la variable independiente):

$$\begin{array}{rrrcl} x & & & = & 0 \\ & y & +z & = & 1 \end{array}$$

Caso 2: $a \neq 1$. En este caso la matriz de coeficientes del sistema es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, que es invertible, porque intercambiando las filas 2 y 3 se vuelve triangular sin ningún 0 en la diagonal (es decir, su determinante es -1). Al ser invertible la matriz de coeficientes, el sistema es compatible determinado. □

2. (1,5 puntos) Encuentra la inversa de esta matriz:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Por eliminación:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{f_1 \leftrightarrow -f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{f_2 \to f_2 - 5f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{f_3 \to f_3 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{f_1 \to f_1 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

La inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. □

3. (2 puntos) Considera esta base de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sea $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal, que tiene la siguiente matriz respecto de la base $\mathcal{B}_1$ y la base estándar de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentra la matriz de f respecto de las bases estándar de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$.

Solución. Sólo hay que cambiar de base en el dominio. La matriz que buscamos es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} C_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

(b) Encuentra las coordenadas de $f((1,2,3,4)^t)$ en la base estándar de $\mathbb{R}^2$.

Solución. Las coordenadas son

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

□

(c) Encuentra una base del núcleo de f.

Solución. Ya hemos encontrado la matriz en la base estándar, así que podemos simplemente usar eliminación en esta matriz. Tiene rango 2 (por ejemplo, las 2 últimas columnas son claramente independientes), así que el núcleo tiene dimensión 2. Podemos encontrar 2 vectores independientes del núcleo aprovechando estas columnas: hacemos $x = 0, y = 1$ para un vector, y $x = 1, y = 0$ para el otro. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

□

(d) Encuentra una base de la imagen de f.

Solución. Como la matriz tiene rango 2, su imagen tiene dimensión 2, y como está contenida en $\mathbb{R}^2$, la imagen es $\mathbb{R}^2$. Una base es la base estándar de $\mathbb{R}^2$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. □

4. (1,5 puntos) Encuentra una matriz C tal que $C^{-1}AC$ sea diagonal, donde A es esta matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución. Encontramos el polinomio característico:

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 4 & -2-\lambda & -4 \\ -2 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} - 1\det\begin{pmatrix} 4 & -2-\lambda \\ -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$(2-\lambda)((-2-\lambda)(3-\lambda)+8)-(8-2(2+\lambda)) = (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda+2)-2(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda) = \lambda(\lambda-1)(2-\lambda)$.

Por tanto, los autovalores son 0, 1 y 2. Hay que encontrar un autovector para cada autovalor. Para el autovalor 0, buscamos el núcleo de la matriz, por eliminación:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{f_2\to f_2-2f_1 \\ f_3\to f_3+f_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podemos ver a ojo que $(1,-2,2)$ está en el núcleo.

Para el autovalor 1, hacemos lo mismo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{f_2\to f_2-4f_1 \\ f_3\to f_3+2f_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos el vector $(1,0,1)$.

Para el autovalor 2, hacemos lo mismo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 4 & -4 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos el vector $(1,1,0)$. Por tanto, una posible matriz C es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

5. (3 puntos) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

   (a) Si A es una matriz cuadrada que cumple que $\det(A)=0$ y B es el resultado de hacer operaciones elementales en las filas de A, entonces $\det(B)=0$.

   Solución. Verdadero. Hemos visto en clase que hacer operaciones elementales en las filas es lo mismo que multiplicar por matrices a la izquierda. Como el determinante del producto es el producto de determinantes, el resultado será multiplicar el determinante de A por algún número, que tendrá que dar 0. □

   (b) Si A es una matriz, no necesariamente cuadrada, y $\vec{b}$ es un vector que cumple que el sistema $A\vec{x}=\vec{b}$ es compatible determinado, entonces el sistema $A\vec{x}=\vec{0}$ también es compatible determinado.

   Solución. Verdadero. El sistema siempre es compatible, porque $A\vec{0}=\vec{0}$. Si fuera indeterminado, habría alguna solución más, $\vec{x}_0\neq\vec{0}$. Entonces, si tomamos una solución $\vec{x}_1$ de $A\vec{x}=\vec{b}$ (que existe porque el sistema es compatible), tendríamos que $\vec{x}_1+\vec{x}_0$ también es solución:

   $$A(\vec{x}_0+\vec{x}_1) = A\vec{x}_0 + A\vec{x}_1 = \vec{0}+\vec{b} = \vec{b}.$$

   Por tanto, habría dos soluciones distintas de $A\vec{x}=\vec{b}$, y sería indeterminado. □

   (c) Si A y B son matrices inversas una de la otra, y se aplican tanto a A como a B las mismas operaciones elementales en sus filas, se obtienen dos matrices que también son inversas una de la otra.

Solución. Esto es falso. Por ejemplo, $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son inversas una de la otra (la identidad es su propia inversa). Si multiplicamos la primera fila de ambas por 2, tenemos dos matrices que no son inversas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

(d) Si A es la matriz de una rotación en el plano, entonces $\det(A) \neq 0$.

Solución. Verdadero. Hemos visto en clase que una rotación en el plano de ángulo θ tiene matriz $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, que tiene determinante $\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$. □

(e) Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ son vectores linealmente dependientes en un espacio vectorial V, y $f\colon V \to W$ es una aplicación lineal, entonces los vectores $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), f(\vec{v}_3), f(\vec{v}_4)$ también son linealmente dependientes.

Solución. Verdadero. Si son dependientes, significa que existen números x_1, x_2, x_3, x_4, no todos 0, tales que

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 + x_4\vec{v}_4 = \vec{0}$$

Aplicando f, y usando que es lineal,

$$x_1 f(\vec{v}_1) + x_2 f(\vec{v}_2) + x_3 f(\vec{v}_3) + x_4 f(\vec{v}_4) = f(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 + x_4\vec{v}_4) = f(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Por tanto, $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), f(\vec{v}_3), f(\vec{v}_4)$ son dependientes. □

(f) Si A y B son matrices cuadradas que cumplen que $AB = BA$, y $\vec{v}$ es un autovector de A con autovalor λ, entonces $B\vec{v}$ también es un autovector de A con autovalor λ.

Solución. Verdadero. Si $\vec{v}$ es autovector de A con autovalor λ, quiere decir que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Por tanto,

$$A(B\vec{v}) \overset{AB=BA}{=} B(A\vec{v}) = B(\lambda\vec{v}) = \lambda(B\vec{v}).$$

□

(g) Sea B una matriz 3×3 fija. Sea F la aplicación del espacio de matrices 3×3 a sí mismo (es decir, de $\mathbb{R}^9$ a $\mathbb{R}^9$) dada por $F(A) = BAB$. Entonces, F es lineal.

Solución. Verdadero. $F(0) = B0B = 0$. Si tenemos dos matrices A_1, A_2, entonces

$$F(A_1 + A_2) = B(A_1 + A_2)B = BA_1B + BA_2B = F(A_1) + F(A_2),$$

y si a es un número,

$$F(aA) = B(aA)B = a(BAB) = aF(A).$$

□

6. (0,5 puntos) Da ejemplos de 5 subespacios vectoriales distintos de $\mathbb{R}^2$ (y justifica que son distintos).

Solución.
- $\mathbb{R}^2$
- $\{(0,0)\}$
- Cualquier recta. Por ejemplo, la recta generada por:
  - $(1,0)$
  - $(1,1)$
  - $(1,2)$
  - $(1,3)$
  - ...

Como dos de estos vectores no son proporcionales, todas estas rectas son distintas.

□