Universidad Autónoma de Madrid

Examen final de Matemáticas 1, primer curso del Grado en Ingeniería Biomédica.
17 de enero de 2024.

Escribe **cuidadosamente** la respuesta: presenta una solución razonada y justificada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

---

1. (1,5 puntos) Decide si el siguiente sistema es compatible o incompatible, y si es determinado o indeterminado, en función de los parámetros a y b.

$$\begin{array}{cccccc} x & +ay & +az & = & a \\ x & +ay & +z & = & b \\ & y & +z & = & a \end{array}$$

2. (1,5 puntos) Encuentra la inversa de esta matriz:

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (2 puntos) Considera esta base de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sea $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal, que tiene la siguiente matriz respecto de la base $\mathcal{B}_1$ y la base estándar de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentra la matriz de f respecto de las bases estándar de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$.

(b) Encuentra las coordenadas de $f((1, 2, 3, 4)^t)$ en la base estándar de $\mathbb{R}^2$.

(c) Encuentra una base del núcleo de f.

(d) Encuentra una base de la imagen de f.

4. (1,5 puntos) Encuentra una matriz C tal que $C^{-1}AC$ sea diagonal, donde A es esta matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Continúa por detrás

5. (3 puntos) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

   (a) Si A es una matriz cuadrada que cumple que $\det(A) = 0$ y B es el resultado de hacer operaciones elementales en las filas de A, entonces $\det(B) = 0$.

   (b) Si A es una matriz, no necesariamente cuadrada, y $\vec{b}$ es un vector que cumple que el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible determinado, entonces el sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ también es compatible determinado.

   (c) Si A y B son matrices inversas una de la otra, y se aplican tanto a A como a B las mismas operaciones elementales en sus filas, se obtienen dos matrices que también son inversas una de la otra.

   (d) Si A es la matriz de una rotación en el plano, entonces $\det(A) \neq 0$.

   (e) Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ son vectores linealmente dependientes en un espacio vectorial V, y $f\colon V \to W$ es una aplicación lineal, entonces los vectores $f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_2), f(\vec{v}_3), f(\vec{v}_4)$ también son linealmente dependientes.

   (f) Si A y B son matrices cuadradas que cumplen que $AB = BA$, y $\vec{v}$ es un autovector de A con autovalor λ, entonces $B\vec{v}$ también es un autovector de A con autovalor λ.

   (g) Sea B una matriz 3×3 fija. Sea F la aplicación del espacio de matrices 3×3 a sí mismo (es decir, de $\mathbb{R}^9$ a $\mathbb{R}^9$) dada por $F(A) = BAB$. Entonces, F es lineal.

6. (0,5 puntos) Da ejemplos de 5 subespacios vectoriales distintos de $\mathbb{R}^2$ (y justifica que son distintos).