Universidad Autónoma de Madrid

Examen final de matemáticas 1 (convocatoria ordinaria), primer curso del Grado en Ingeniería Biomédica.
18 de enero de 2022.

Se pide escribir cuidadosamente la respuesta: presenta una solución razonada y justificada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

Todo lo visto en clase se puede usar libremente siempre que se haga referencia a qué se está usando. Se puede usar cualquier método siempre que sea correcto y esté justificado, aunque no se haya visto en clase.

Si en un problema cometes un error por el que perder x puntos, pero explicas por qué sabes que está mal aunque no encuentres el error, recuperarás $x/2$ puntos.

---

1. (2 puntos) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta (en este y todos los problemas).

   (a) Si A y B son dos matrices tales que AB tiene sentido, entonces BA también tiene sentido.

   Solución. Falso. Por ejemplo, si A es 1×2 y B es 2×3, AB tiene sentido y BA no. □

   (b) Para cualesquiera matrices cuadradas A y B del mismo tamaño, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

   Solución. Falso. Esto requiere que $AB = BA$. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   mientras que

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   □

   (c) Si A es una matriz cuadrada, b es un vector columna y $Ax = b$ es un sistema compatible determinado, entonces A es invertible.

   Solución. Verdadero. Esto lo hemos visto en clase. □

   (d) Si A es una matriz, no necesariamente cuadrada, b_1 es un vector columna y el sistema $Ax = b_1$ es compatible indeterminado, entonces hay algún vector columna b_2 para el que el sistema $Ax = b_2$ es incompatible.

   Solución. Falso. Por ejemplo, si A es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces para cualquier $b = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ el sistema $Ax = b$ es compatible indeterminado: sus soluciones son $\begin{pmatrix} a \\ \lambda \end{pmatrix}$ para cualquier λ. □

   (e) El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ que se pueden escribir como $(t, 2t)$ para algún $t \in \mathbb{R}$ es un espacio vectorial (con la suma y producto de $\mathbb{R}^2$).

   Solución. Verdadero. Es la imagen de la aplicación lineal dada por la matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. □

   (f) Las funciones $\{1, 2+x, x^3+x\}$ son linealmente independientes.

   Solución. Verdadero. Podemos por ejemplo calcular su Wronskiano, que nos da

$$W(1, 2+x, x^3+x) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2+x & x^3+x \\ 0 & 1 & 3x^2+1 \\ 0 & 0 & 6x \end{pmatrix} = 6x \neq 0.$$

   Como no es idénticamente 0, son independientes. □

   (g) Si todos los menores 3×3 de una matriz 4×4 son nulos, entonces la matriz tiene rango 0, 1 o 2.

   Solución. Verdadero. Esto lo hemos visto en clase. □

(h)

$$\det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & y & x & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x^4 - y^4.$$

Solución. Falso. Desarrollando el determinante por la primera fila,

$$\det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & y & x & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x\det\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} - y\det\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & y & x \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} = x\left(x^3 - xy^2\right) - y\left(x^2y - y^2\right) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4.$$

□

(i) Hacer operaciones elementales en las filas de una matriz no cambia su rango.

Solución. Verdadero. Lo hemos visto en clase. □

(j) Hacer operaciones elementales en las filas de una matriz no cambia su determinante.

Solución. Esto es falso. Por ejemplo,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

pero si multiplicamos la primera fila por 2,

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

□

2. (1,5 puntos) Decide si el sistema es compatible o incompatible, y si es determinado o indeterminado, en función del parámetro λ:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \\ 4x + \lambda y &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

Solución. Restamos de la segunda ecuación el doble de la primera, y nos queda la ecuación $0 = 0$, que podemos ignorar. Nos queda el sistema que tiene matriz

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 4 & \lambda & \lambda \end{array}\right).$$

La matriz de coeficientes tiene determinante $\lambda - 4$. Por tanto, si $\lambda \neq 4$, tiene rango 2, es invertible y el sistema es compatible determinado.

Nos queda por estudiar el caso en el que $\lambda = 4$. Tenemos esta matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

Restando 4 veces la primera fila de la segunda, tenemos esta matriz escalonada, que corresponde a un sistema incompatible:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

□

3. (1,5 puntos) En este problema A siempre se refiere a esta matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Encuentra los autovalores de A.

Solución. Calculamos su polinomio característico:

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 0\\ 2 & -1-\lambda & -2\\ -1 & 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda\det\begin{pmatrix}-1-\lambda & -2\\ 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}-2\det\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1-\lambda\end{pmatrix}=$$

$$-\lambda\left((-1-\lambda)(1-\lambda)+4\right)-2\left(2(1-\lambda)-2\right)=-\lambda\left(\lambda^2+3\right)-2\left(-2\lambda\right)=-\lambda^3+\lambda=-\lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$$

Por tanto sus autovalores son 0, 1 y -1. □

(b) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual A sea diagonal.

Solución. Vamos a encontrar un autovector para cada autovalor, por eliminación, y formarán la base que buscamos. Con autovalor 0:

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\overset{\substack{f_2+\frac{1}{2}f_1\\ f_3-f_1}}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\overset{f_2+2f_3}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Un autovector es $(1,0,1)^t$. Con autovalor 1:

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -2 & -2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}\overset{f_3-f_1}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{f_2+2f_1}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Tomando $z=1$, tenemos que $y=1$ y $x=2$, así que $(2,1,1)^t$ es un autovector. Con autovalor -1:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}\overset{f_3+f_1}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}\overset{f_2-2f_1}{\rightsquigarrow}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

Tomando $y=1$, tenemos que $x=-2$ y $z=-2$, así que $(-2,1,-2)^t$ es un autovector. Los tres autovectores que hemos encontrado son independientes, porque tienen autovalores distintos, así que son la base que buscamos. □

(c) Encuentra una matriz C tal que $C^{-1}AC$ sea diagonal.

Solución. Basta juntar los 3 autovectores en una matriz:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

□

(d) Calcula C^{-1}.

Solución. Por eliminación:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{f_3-f_1}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\overset{f_2\leftrightarrow f_3}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{f_1+2f_2\\ f_2\to -f_2\\ f_3+f_2}}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\overset{f_1+2f_3}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right).$$

La inversa es

$$\begin{pmatrix}-3 & 2 & 4\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

□

4. (1,5 puntos) Encuentra una base (ortonormal)[1] del núcleo y una base ortonormal de la imagen de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. A ojo, se ven dos vectores independientes en el núcleo: $(1,1,0,0)^t$ y $(0,0,1,-1)^t$. Por otro lado, el menor 2×2 central es $\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, así que el rango es al menos 2. Por el teorema del rango-nulidad, el rango tiene que ser exactamente 2 y la dimensión del núcleo también, pues suman 4. Por tanto, esta es una base del núcleo (habría que dividir cada vector por $\sqrt{2}$ para que fuera una base ortonormal).

Como el rango es 2, una base de la imagen tendrá dos vectores independientes, que se pueden elegir de entre las columnas de la matriz. Por ejemplo, $(1,2,2,1)^t$ y $(1,1,0,1)^t$. □

5. (1 punto) Tenemos dos bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

En la base $\mathcal{B}_1$, el vector v tiene coordenadas $(1,0,1)$. Encuentra las coordenadas de v respecto de la base $\mathcal{B}_2$.

Solución. Si el vector v tiene coordenadas $(1,0,1)$, quiere decir que en la base estándar,

$$v = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Falta encontrar las coordenadas de $(3,-4,-3)^t$ respecto de la base $\mathcal{B}_2$. Para ello, usamos la matriz de cambio de base de la base estándar a $\mathcal{B}_2$, que es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Esta matriz está pensada para darse cuenta de que como la base es ortonormal, la inversa es la traspuesta (o se puede calcular de cualquier otra manera):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, las coordenadas de v son

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{6}{\sqrt{2}} \\ -4 \end{pmatrix}.$$

□

6. (1 punto) Tenemos las bases

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ y } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

Una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tiene matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ respecto de estas dos bases. Encuentra la matriz de f respecto de las bases estándar de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

[1] En el curso 23/24 no hemos hablado de bases ortonormales

Solución. Si llamamos $\mathcal{B}_2$ (resp. $\mathcal{B}_3$) a la base que nos dan de $\mathbb{R}^2$ (esp. de $\mathbb{R}^3$), la matriz que buscamos es

$$C_{\mathcal{B}_3\to\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}C_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^2}\to\mathcal{B}_2}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$$

□

7. (0,5 puntos) ¿Es $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3x=0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?

   Solución. Sí: es el núcleo de $\begin{pmatrix}3 & 0\end{pmatrix}$. □

8. (0,5 puntos) Considera la aplicación $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z)=(x^2,y-z)$. ¿Es lineal?

   Solución. No:

$$f(2\cdot(1,0,0))=f(2,0,0)=(4,0),$$
$$2f(1,0,0)=2\cdot(1,0)=(2,0).$$

□

9. (0,5 puntos) Da un ejemplo de un espacio vectorial y un conjunto de tres vectores dependientes $\{u,v,w\}$ de manera que cualesquiera 2 de ellos sean independientes, es decir, los conjuntos $\{u,v\}$, $\{v,w\}$, $\{u,w\}$ son conjuntos independientes.

   Solución. Por ejemplo $\mathbb{R}^2$, y los vectores $(1,0)^t,(0,1)^t$ y $(1,1)^t$. Son dependientes, porque son 3, que es más que la dimensión de $\mathbb{R}^2$, pero ningún par de dos de ellos son dependientes, es decir, no son proporcionales. □