Universidad Autónoma de Madrid

Examen final de matemáticas 1 (convocatoria ordinaria), primer curso del Grado en Ingeniería Biomédica.
18 de enero de 2022.

Se pide escribir cuidadosamente la respuesta: presenta una solución razonada y justificada, indicando los detalles y explicando el método utilizado.

Todo lo visto en clase se puede usar libremente siempre que se haga referencia a qué se está usando. Se puede usar cualquier método siempre que sea correcto y esté justificado, aunque no se haya visto en clase.

Si en un problema cometes un error por el que perder x puntos, pero explicas por qué sabes que está mal aunque no encuentres el error, recuperarás $x/2$ puntos.

---

1. (2 puntos) ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta (en este y todos los problemas).
   (a) Si A y B son dos matrices tales que AB tiene sentido, entonces BA también tiene sentido.
   (b) Para cualesquiera matrices cuadradas A y B del mismo tamaño, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
   (c) Si A es una matriz cuadrada, b es un vector columna y $Ax = b$ es un sistema compatible determinado, entonces A es invertible.
   (d) Si A es una matriz, no necesariamente cuadrada, b_1 es un vector columna y el sistema $Ax = b_1$ es compatible indeterminado, entonces hay algún vector columna b_2 para el que el sistema $Ax = b_2$ es incompatible.
   (e) El conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ que se pueden escribir como $(t, 2t)$ para algún $t \in \mathbb{R}$ es un espacio vectorial (con la suma y producto de $\mathbb{R}^2$).
   (f) Las funciones $\{1, 2+x, x^3+x\}$ son linealmente independientes.
   (g) Si todos los menores 3×3 de una matriz 4×4 son nulos, entonces la matriz tiene rango 0, 1 o 2.
   (h)
   $$\det \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & y & x & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{pmatrix} = x^4 - y^4.$$
   (i) Hacer operaciones elementales en las filas de una matriz no cambia su rango.
   (j) Hacer operaciones elementales en las filas de una matriz no cambia su determinante.

2. (1,5 puntos) Decide si el sistema es compatible o incompatible, y si es determinado o indeterminado, en función del parámetro λ:
   $$\left.\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \\ 4x + \lambda y &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

3. (1,5 puntos) En este problema A siempre se refiere a esta matriz:
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Encuentra los autovalores de A.
   (b) Encuentra una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual A sea diagonal.
   (c) Encuentra una matriz C tal que $C^{-1}AC$ sea diagonal.
   (d) Calcula C^{-1}.

4. (1,5 puntos) Encuentra una base ortonormal del núcleo y una base ortonormal de la imagen de la matriz
   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Continúa por detrás

5. (1 punto) Tenemos dos bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}.$$

En la base $\mathcal{B}_1$, el vector v tiene coordenadas $(1,0,1)$. Encuentra las coordenadas de v respecto de la base $\mathcal{B}_2$.

6. (1 punto) Tenemos las bases

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ y } \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{R}^3$$

Una aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tiene matriz $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}$ respecto de estas dos bases. Encuentra la matriz de f respecto de las bases estándar de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

7. (0,5 puntos) ¿Es $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 3x = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?

8. (0,5 puntos) Considera la aplicación $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z) = (x^2, y-z)$. ¿Es lineal?

9. (0,5 puntos) Da un ejemplo de un espacio vectorial y un conjunto de tres vectores dependientes $\{u,v,w\}$ de manera que cualesquiera 2 de ellos sean independientes, es decir, los conjuntos $\{u,v\}, \{v,w\}, \{u,w\}$ son conjuntos independientes.