---

1) [1.5 puntos] Calcula la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2ix_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 5ix_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Solución: Aplicamos eliminación de Gauss para obtener la forma escalonada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2i \\ 2 & 2 & 1 & -5i \\ 3 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - 2f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 3f_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2i \\ 0 & 0 & 3 & -9i \\ 0 & 0 & 2 & -6i \end{pmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 - \frac{2}{3} f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2i \\ 0 & 0 & 3 & -9i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las columnas no pivote son la segunda y la cuarta, entonces escogemos $x_2 = \lambda$ y $x_4 = \mu$ con λ y μ parámetros arbitrarios. La segunda fila y la primera fila de la forma escalonada implican, respectivamente, al despejar:

$$x_3 = 3i\mu \qquad \text{y} \qquad x_1 = -\lambda + 3i\mu - 2i\mu = -\lambda + i\mu.$$

Por tanto, la solución general es

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -\lambda + i\mu \\ \lambda \\ 3i\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

---

2) [2 puntos] En $\mathbb{R}_2[x]$, el espacio de polinomios reales de grado menor o igual que 2, consideramos el endomorfismo dado por $f(P) = P'' + (2-x)P' + P$. Halla una base de su imagen.

Solución: Escojamos, por ejemplo, la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. La matriz correspondiente de f está formada por las coordenadas de las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$ escritas en columna:

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= 1 && = 1\cdot 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ f(x) &= 2 - x + x && = 2\cdot 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 \\ f(x^2) &= 2 + (2-x)2x + x^2 && = 2\cdot 1 + 4\cdot x - 1\cdot x^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Considerando la forma escalonada de M (por ejemplo con $f_3 \mapsto f_3 + \frac{1}{4}f_2$) se deduce que las columnas pivote son la primera y la tercera. Estas columnas de M dan las coordenadas de una base $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}}$ de la imagen, así pues, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}} = \{1, 2+4x-x^2\}$.

---

3) [1.5 puntos] Halla las dimensiones del núcleo y de la imagen para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 + x_4 \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Solución: La aplicación lineal f escrita en forma matricial es:

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} \qquad \text{con} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dos pasos de eliminación de Gauss llevan a la forma escalonada:

$$A \underset{\substack{f_2 \mapsto f_2 - 4f_1 \\ f_3 \mapsto f_3 - 2f_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \underset{f_3 \mapsto f_3 - \frac{2}{3}f_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como hay dos escalones, $\mathrm{rg}(A) = 2$. Por la teoría, $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rg}(A) = 2$ y $\dim \mathrm{Ker}(f) = n - \mathrm{rg}(A) = 4 - 2 = 2$.

---

4) [1.5 puntos] Un triángulo tiene como vértices los puntos $(0,1)$, $(4,3)$ y un tercero en la recta $y = x$. Determina todas las posibilidades para este tercer vértice sabiendo que el triángulo tiene área uno.

Solución: Si el tercer punto está en la recta $y = x$, tiene sus dos coordenadas iguales, digamos que es $P_3 = (x,x)$. Los vectores correspondientes a dos de los lados del triángulo son:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} x-0 \\ x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x-1 \end{pmatrix}.$$

Según la teoría, el área del triángulo es el determinante de la matriz que conforman estos dos vectores dividido entre 2 y sin signo. Por tanto, debemos resolver

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & x \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

El primer miembro es $\frac{1}{2}(4x-4-2x) = x-2$. Con el signo positivo, $x-2=1$ implica $x=3$ y con el negativo, $x-2=-1$ implica $x=1$. En conclusión, las posibilidades son $P_3=(1,1)$ y $P_3=(3,3)$.

---

5) [2 puntos] Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Calcula sus autovalores y autovectores y emplea el resultado para hallar A^{2025}.

Solución: El polinomio característico es

$$|A-\lambda I| = (3-\lambda)(-3-\lambda)+10 = (-\lambda)^2 - 9 + 10 = \lambda^2+1.$$

Por tanto los autovalores son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$. Consecuentemente, las ecuaciones que determinan los autovectores respectivos son:

$$\begin{pmatrix} 3-i & 10 \\ -1 & -3-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 3+i & 10 \\ -1 & -3+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Necesariamente estos sistemas son compatibles indeterminados y como cada uno está compuesto de dos ecuaciones no triviales, podemos despreciar una de ellas (la otra daría una fila de ceros al aplicar eliminación de Gauss). En ambos casos nos quedamos con la segunda y tomando $x_2=\mu$ se deduce que todos los autovectores para λ_1 son $\mu(-3-i,1)^t$ y para λ_2 son $\mu(-3+i,1)^t$, con $\mu \neq 0$ arbitrario.

La teoría implica que si C es una matriz cuyas columnas son autovectores de λ_1 y λ_2 (por ese orden), se cumple

$$A = CDC^{-1} \qquad \text{y} \qquad A^{2025} = CD^{2025}C^{-1} \qquad \text{con} \quad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Se tiene $i^{2025} = i \cdot i^{2024} = i$ porque $i^4 = 1$ y 2024 es múltiplo de 4. Por otro lado, $(-i)^{2025} = -i^{2025} = -i$. Así pues, $D^{2025} = D$ y se deduce $A^{2025} = A$.

---

6) [1.5 puntos] Halla la proyección ortogonal de $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sobre W donde

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}.$$

Solución: Se tiene $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{x}\cdot\vec{n} = 0\}$ con $\vec{n} = (1,-2,-2)^t$. Es decir, W es el subespacio formado por los vectores perpendiculares a $\vec{n}$. En esa situación se puede emplear la fórmula:

$$P_W(\vec{v}) = \vec{v} - \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}.$$

Los cálculos son:

$$P_W(\vec{v}) = \begin{pmatrix}-12\\12\\-9\end{pmatrix} - \frac{-12-24+18}{9}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\12\\-9\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\8\\-13\end{pmatrix}.$$

Criterios de corrección

En Moodle hay comentarios personalizados sobre los errores. Tengo en cuenta el aspecto general y la coherencia. Los errores leves de cuentas penalizan 0,25. Indico aquí otras penalizaciones típicas por ejercicio:

Ejercicio 1.

En clase siempre hemos escogido las variables no pivote para asignar parámetros arbitrarios porque en otro caso se puede llegar a resultados erróneos. No he penalizado proceder de otra forma si se hace coherentemente.

• Enunciado mal copiado en la matriz $-0{,}25$.

Ejercicio 2.

• El resultado debería escribirse como dos polinomios porque una base de $\mathbb{R}_2[x]$ debe estar compuesta por elementos de $\mathbb{R}_2[x]$. No lo penalizo.

• No construir bien la matriz $-0{,}75$.

Ejercicio 3.

• Enunciado mal copiado en la matriz $-0{,}25$.

Ejercicio 4.

• No considerar los dos posibles signos $-0{,}5$.

• Usar los puntos en lugar de los vectores que determinan $-1{,}0$.

• No usar que el tercer punto está en la recta, esto es, que $x = y$, $-0{,}75$.

Ejercicio 5.

En general, los valores propios cuentan 0,5, los vectores propios 0,5 y el cálculo de A^{2025} cuenta 1,0.

• Estrictamente, el enunciado decía que había que emplear autovalores y autovectores para hallar A^{2025}, pero no he penalizado usar otro método.

• La multiplicación de matrices no es conmutativa, el orden importa $-0{,}5$.

Ejercicio 6.

• Usar una fórmula incorrecta, al menos $-0{,}5$.