
Apellidos y nombre:

..... DNI (o pasaporte):

1) [1.5 puntos] Calcula la solución general del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2ix_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 5ix_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

2) [2 puntos] En $\mathbb{R}_2[x]$, el espacio de polinomios reales de grado menor o igual que 2, consideramos el endomorfismo dado por $f(P) = P'' + (2 - x)P' + P$. Halla una base de su imagen.

3) [1.5 puntos] Halla las dimensiones del núcleo y de la imagen para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 + x_4 \\ 4x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 \end{pmatrix}.$$

4) [1.5 puntos] Un triángulo tiene como vértices los puntos $(0, 1)$, $(4, 3)$ y un tercero en la recta $y = x$. Determina todas las posibilidades para este tercer vértice sabiendo que el triángulo tiene área uno.

5) [2 puntos] Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Calcula sus autovalores y autovectores y emplea el resultado para hallar A^{2025} .

6) [1.5 puntos] Halla la proyección ortogonal de $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sobre W donde

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\}.$$