Enunciado. Considera la matriz $A \in \mathcal{M}_{2024}(\mathbb{R})$ cuyos elementos vienen dados por

$$a_{mn} = \sqrt{mn} \quad \text{si } m \neq n \qquad \text{y} \qquad a_{nn} = n - \frac{2024 \cdot 2025}{4}.$$

Calcula A^{-1} justificando con detalle la respuesta y explicando cómo has llegado a ella.

Solución. Escribamos γ en vez de $2024 \cdot 2025/4$ para abreviar. Las matrices de la pista cumplen $A^{-1} = \lambda A$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, lo cual equivale a que A^2 es proporcional a I. Motivados por ello, calculemos los elementos c_{nm} de A^2. Vienen dados por[1]

$$c_{nm} = \sum_{k=1}^{2024} a_{nk}a_{km} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{2024} \sqrt{nk}\, a_{km} + (n-\gamma)a_{nm} = \sum_{k=1}^{2024} \sqrt{nk}\, a_{km} - \gamma a_{nm}.$$

Procediendo de la misma forma en el último sumatorio, se obtiene

$$c_{nm} = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{2024} \sqrt{nk}\sqrt{km} + (m-\gamma)\sqrt{nm} - \gamma a_{nm} = \sqrt{nm}\sum_{k=1}^{2024} k - \gamma\sqrt{nm} - \gamma a_{nm}.$$

Por la suma de una progresión aritmética, $1 + 2 + 3 + \cdots + 2024 = 2\gamma$. Así pues, $c_{nm} = \gamma(\sqrt{nm} - a_{nm})$ que es 0 si $n \neq m$ y γ^2 si $n = m$. En definitiva, hemos demostrado $A^2 = \gamma^2 I$, por tanto $A^{-1} = \gamma^{-2}A$. Es decir, los elementos de A^{-1} son los mismos que los del enunciado multiplicados por $\gamma^{-2} = \frac{16}{2024^2 \cdot 2025^2}$.

[1] Recuerda (resumen 0, p.5) que si $C = AB$ entonces $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$. Si no lo entiendes, nota que a_{ik} con k variando es la fila i y b_{kj} con k variando es la columna j.