En los últimos 15 años, se han probado algunos resultados acerca de la distribución de la sucesión de números primos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que se creían fuera de alcance. Aquí se recogen cuatro de ellos, publicados en la prestigiosa revista de investigación *Annals of Mathematics*.

1) El teorema de Green y Tao [2] afirma que cualquiera que sea $m \in \mathbb{Z}^+$ podemos hallar m primos distintos $\{p_{n_j}\}_{j=1}^{m}$ tales que

$$p_{n_2} - p_{n_1} = p_{n_3} - p_{n_2} = \cdots = p_{n_m} - p_{n_{m-1}}.$$

Es decir, que la sucesión de primos contiene progresiones aritméticas tan largas como se desee.

2) Se llama GPY a los resultados de [1], que llevan a

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_n} = 0.$$

Esto implica que el espaciamiento entre primos no es muy regular.

3) Unos años después, en [5] y [4], se llegó a un resultado más fuerte:

$$\liminf_{n\to\infty} \big(p_{n+1} - p_n\big) = C$$

con C constante. Para $C = 2$ se obtendría la *conjetura de los primos gemelos*, pero eso parece inalcanzable. Por ahora, se conoce $C \leq 246$.

4) El resultado de [3], en esencia, muestra que hay cancelación en sumas cortas de la función de Möbius μ, ligada a la paridad del número de factores primos. Si recuerdas de “Conjuntos y Números” la función φ de Euler, ambas están relacionadas mediante $\varphi(n)/n = \sum_{d|n} \mu(d)/d$.

Referencias

[1] Daniel A. Goldston, János Pintz, and Cem Y. Yıldırım. Primes in tuples. I. *Ann. of Math. (2)*, 170(2):819–862, 2009.

[2] Ben Green and Terence Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Ann. of Math. (2)*, 167(2):481–547, 2008.

[3] Kaisa Matomäki and Maksym Radziwiłł. Multiplicative functions in short intervals. *Ann. of Math. (2)*, 183(3):1015–1056, 2016.

[4] James Maynard. Small gaps between primes. *Ann. of Math. (2)*, 181(1):383–413, 2015.

[5] Yitang Zhang. Bounded gaps between primes. *Ann. of Math. (2)*, 179(3):1121–1174, 2014.