Dos libros clásicos

(y otro que no lo es tanto)

El clásico [P] se publicitaba en la portada de su primera edición como "Un sistema de pensamiento que puede ayudarte a resolver cualquier problema". Quizá debieran haber aclarado que eran de matemáticas. Allí se pide al lector como ejercicio que halle y demuestre la ley general sugerida por:

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 3+5 &= 8, \\ 7+9+11 &= 27, \\ 13+15+17+19 &= 64. \end{aligned}$$

Otro gran clásico es [R]. En él se prueba que $n = 30$ es el mayor número tal que todo k con $1 < k < n$ y sin factores comunes con n, es primo. Esto se deduce de que la sucesión de números primos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 3, \dots\}$ satisface

$$p_{n+1} < \sqrt{\mathcal{P}_n} \qquad \text{para} \quad n \geq 4 \quad \text{donde} \quad \mathcal{P}_n = \prod_{k=1}^{n} p_k.$$

Para demostrarlo, se consideran el menor i tal que $n-(i-1) < p_i$ y los números

$$\begin{aligned} &(1) & M_1 &= p_1 p_2 \dots p_{i-1} \cdot 1 - 1, \\ & & M_2 &= p_1 p_2 \dots p_{i-1} \cdot 2 - 1, \\ & & \dots &= \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ &(2) & M_{p_i} &= p_1 p_2 \dots p_{i-1} \cdot p_i - 1. \end{aligned}$$

De (1) se deduce $p_k \nmid M_1$ para $1 \leq k < i$ y de (2) que, además, $p_i \nmid M_{p_i}$. Con más cuidado, se obtiene que existe un ℓ tal que $p_k \nmid M_\ell$ para $1 \leq k \leq n$, lo que implica $p_{n+1} < \mathcal{P}_i$. Por otro lado, un argumento más sencillo lleva a

$$(3) \qquad \mathcal{P}_i < p_{i+1} p_{i+2} \dots p_n.$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} p_{n+1}^2 < \mathcal{P}_i^2 &= \mathcal{P}_i \cdot \mathcal{P}_i \\ &< \mathcal{P}_i \cdot \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_i} = \mathcal{P}_n \quad \text{por (3).} \end{aligned}$$

Aunque posiblemente no pueda calificarse de clásico fuera de España, una pequeña joya a tener en cuenta, escrita por un gran divulgador, es [G].

Referencias

[G] M. de Guzmán, *Cuentos con cuentas*, Labor, Barcelona (1984).

[P] G. Pólya, *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1945).

[R] H. Rademacher y O. Toeplitz, *The enjoyment of mathematics; Selections from mathematics for the amateur*, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1957).