Derivadas

Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

Curso: Análisis Matemático I   Profesor: Fernando Chamizo

1. El concepto de derivada

La *derivada* es la tasa de variación de una función con respecto a su variable. En este curso tal función y su variable serán reales y en un próximo curso de análisis verás que considerar variables complejas comporta más de una sorpresa. Formalmente, se llama *derivada* de f en el punto x_0 a

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

El denominador es lo mismo que $(x_0 + h) - x_0$ por tanto realmente es la anunciada tasa de variación de la f con respecto a la x cuando los incrementos de de esta última son infinitesimales. Aparte de f', se utiliza también la *notación de Leibniz*

$$f' = \frac{df}{dx} \qquad \text{y} \qquad f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{o} \quad f'(x_0) = \frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}.$$

Las derivadas son importantes porque aparecen en infinidad de modelos. Por mencionar uno relacionado con la ingeniería de telecomunicaciones, un condensador funciona como un conductor interrumpido para la corriente continua mientras que deja pasar más corriente alterna cuanto mayor sea su variación de voltaje y la capacidad C del condensador. De este modo, la corriente $I(t)$ y el voltaje $V(t)$ se relacionan mediante $I(t) = CV'(t)$.

La derivada también tiene un significado geométrico. Concretamente, $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente de la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$. Es decir, dicha recta tangente es:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

La idea que sustenta esta fórmula es simple: basta considerar la recta secante que conecta $\big(x_0, f(x_0)\big)$ con $\big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$ y tomar $h \to 0$.

Calcular derivadas de funciones sencillas con la definición no es buena idea y más adelante veremos técnicas para evitarlo (que, con seguridad, ya conoces). De todas formas, para practicar, calculemos la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$ mediante la definición y usemos el resultado para hallar la recta tangente correspondiente. La derivada es

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4+h})^2-4}{h\big(\sqrt{4+h}+2\big)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\big(\sqrt{4+h}+2\big)} = \frac{1}{4}.$$

En $x_0 = 4$ se tiene $f(x_0) = 2$ y la recta tangente en el punto $(4, 2)$ resulta

$$y = \frac{1}{4}(x-4)+2 \qquad \text{esto es} \qquad y = \frac{1}{4}x+1.$$

No todas las funciones son derivables. Una función que no es continua en un punto x_0 no puede ser derivable en x_0 porque $f(x_0+h)-f(x_0)$ no tendería a cero y solo una indeterminación del tipo $0/0$ permite que el límite que define $f'(x_0)$ exista. Por otro lado, hay funciones continuas en un punto que no son derivables en él (incluso hay funciones muy complicadas que son continuas en todo $\mathbb{R}$ y no derivables en ningún punto). Un ejemplo típico de función no derivable en cero es $f(x) = |x|$. La razón es que $\lim_{h\to 0} |h|/h$ no existe ya que los límites laterales son distintos.

Para ilustrar las dificultades de aplicar la definición, veamos la prueba de que la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es $f'(x) = \cos x$. Se tiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}.$$

Nos quedamos atascados porque no se ve cómo simplificar en esta indeterminación $0/0$. Aunque conozcas la regla de L'Hôpital, aquí es inútil si no das por hecho que conoces de antemano la derivada de f, que es justamente lo que deseamos calcular. Apelamos a la fórmula trigonométrica $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$ y utilizamos que sabíamos a través de un argumento geométrico que $(\operatorname{sen} t)/t \to 1$ cuando $t \to 0$. Con estas herramientas, ya podemos calcular el límite anterior.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen}(h/2)\cos(x+h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h/2)}{h/2} \lim_{h\to 0} \cos(x+h/2) = \cos x.$$

Con un razonamiento parecido, se demostraría que la derivada de $f(x) = \cos x$ es $f'(x) = -\operatorname{sen} x$. En realidad el razonamiento es idéntico si recordamos que $\operatorname{sen}(x+\pi/2) = \cos x$.

2. Cálculo de derivadas

Las funciones elementales están construidas por unas pocas funciones ligadas por operaciones elementales y composiciones, por tanto, sabiendo cómo se comporta la derivada respecto a estas operaciones y composiciones seremos capaces de calcular la derivada de cualquier función elemental apelando a unas pocas derivadas muy básicas.

Comencemos con las operaciones elementales. Las fórmulas relevantes son:

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \qquad (fg)' = f'g + fg', \qquad \Big(\frac{f}{g}\Big)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

A pesar de que todos memorizamos estas fórmulas, su significado no es tan difícil de entender. Para deducirlas hay que expresar en la definición de derivada el incremento de la operación en términos del incremento de las funciones. Sin entrar en detalles, la segunda depende de la igualdad

$$(fg)(x+h) - (fg)(x) = \big(f(x+h) - f(x)\big)g(x+h) + f(x)\big(g(x+h) - g(x)\big).$$

Respecto a la composición, la fórmula correspondiente es la llamada *regla de la cadena*:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)g'.$$

En palabras, al derivar una función dentro de otra, debemos derivar la de fuera y multiplicar por la derivada de la de dentro.

Teniendo en cuenta estas reglas, todas las derivadas de funciones elementales dependen de que la derivada de una constante es nula (esto es trivial) y de las siguientes:

$$\begin{array}{lllllll} x^\alpha & \longrightarrow & \alpha x^{\alpha-1} & \qquad & \operatorname{sen} x & \longrightarrow & \cos x \\ e^x & \longrightarrow & e^x & & \cos x & \longrightarrow & -\operatorname{sen} x \\ \log x & \longrightarrow & 1/x & & & & \end{array}$$

En realidad, hay cierta redundancia en esta tabla y se podría ser más escueto. La derivada de x^α se deduce de la e^x y $\log x$ porque $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$. Incluso todas las de la primera columna se deducen de la de e^x o de la de $\log x$, aunque todavía está fuera de nuestro nivel hallarlas. Por otro lado, ya sabíamos que la derivada de $\operatorname{sen} x$ es $\cos x$ y escribiendo $\cos x = \operatorname{sen}(\pi/2 + x)$ podríamos deducir la de $\cos x$.

La derivada de $\tan x$ se obtiene derivando el cociente $\operatorname{sen} x / \cos x$ y resulta $1 + \tan^2 x$ que también es igual a $\sec^2 x = 1/\cos^2 x$. Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas también admiten fórmulas explícitas:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arc\,sen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Se deducen aplicando la regla de la cadena. Por ejemplo, para $f(x) = \arctan x$,

$$\tan f(x) = x \quad \Rightarrow \quad \big(1 + \tan^2 f(x)\big) f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 f(x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Para practicar, calculemos las derivadas de $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\log x}{x}$, de $g(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ y de $h(x) = \big(\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x\big)\operatorname{sen}^2 x + \cos^4 x$. En f nos encontramos una función seno y dentro un cociente, por tanto:

$$f'(x) = \cos\Big(\frac{\log x}{x}\Big)\Big(\frac{\log x}{x}\Big)' = \cos\Big(\frac{\log x}{x}\Big)\frac{1/x \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}\cos\frac{\log x}{x}.$$

La derivada de g es más difícil. El paso clave es reescribirla como $g(x) = e^{\log x \ \mathrm{sen}\, x}$, usando $x = e^{\log x}$, para que podamos emplear que es una exponencial con un producto dentro. Se tiene

$$g'(x) = e^{\log x \ \mathrm{sen}\, x}(\log x \ \mathrm{sen}\, x)' = x^{\mathrm{sen}\, x}\Big(\frac{\mathrm{sen}\, x}{x} + \log x \ \cos x\Big).$$

Una alternativa es lo que se llama *derivación logarítmica* que consiste en derivar $\log g(x) = (\log x)\,\mathrm{sen}\, x$ y despejar g' en $g'(x)/g(x) = (\log x \ \mathrm{sen}\, x)'$.

La derivada de h es trivial si observamos antes de comenzar que es $\mathrm{sen}^4 x + 2\,\mathrm{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = \big(\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x\big)^2 = 1$, por tanto, $h'(x) = 0$. Si derivamos h tal como está, sin simplificar, el cálculo sería

$$h'(x) = \big(2\,\mathrm{sen}\, x \cos x + 4\cos x(-\,\mathrm{sen}\, x)\big)\,\mathrm{sen}^2 x + \big(\,\mathrm{sen}^2 x + 2\cos^2 x\big)2\,\mathrm{sen}\, x \cos x - 4\cos^3 x\,\mathrm{sen}\, x.$$

Operando, todos los términos se cancelan.

Las técnicas para el cálculo de derivadas no permiten que nos olvidemos del todo de la definición original porque hay ejemplos rebuscados de funciones tales que su derivada existe y no es continua de modo que su valor en puntos conflictivos no se deduce de lo que ocurre alrededor. Por ejemplo, $f(x) = x^2\cos(x^{-2})$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 0$, cumple $f'(0) = 0$ aplicando la definición. Sin embargo, para $x \neq 0$, por la regla de la cadena $f'(x) = 2x\cos(x^{-2}) + 2x^{-1}\,\mathrm{sen}(x^{-2})$ que no tiene límite cuando $x \to 0$.

3. El teorema de Taylor

Con la definición inicial, para hacer derivadas teníamos que calcular límites difíciles. Una vez que sabemos más acerca del cálculo de derivadas y lo hemos reducido a un algoritmo en el caso de las funciones elementales, es natural proceder en sentido contrario y utilizar derivadas para hallar límites.

El resultado más conocido al respecto es la *regla de L'Hôpital* que afirma que si

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{es del tipo} \quad \frac{0}{0} \ \text{ o } \ \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existe o es } \infty,$$

entonces ambos límites coinciden. Además el resultado se extiende al caso $a = \infty$ y también al de límites laterales.

Las derivadas sucesivas de una función habitualmente se complican bastante, por eso, cuando la regla de L'Hôpital se aplica más de una vez es a menudo conveniente hacer simplificaciones eliminando las partes que no participan en la indeterminación.

Un ejemplo que ya conocíamos por un argumento geométrico es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\, x}{x} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1.$$

Si la función fuera $(\operatorname{sen}^{100} x)/x^{100}$, aplicar maquinalmente la regla de L'Hôpital daría lugar a unos cálculos imposibles porque hasta que no derivemos 100 veces x^{100} no se transformará en una constante no nula. El atajo obvio es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^{100} x}{x^{100}} = \Big(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)^{100} \underset{\text{L'H}}{=} \Big(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}\Big)^{100} = 1.$$

Otro ejemplo con simplificaciones menos obvias es:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(\log^2 x)}{\sqrt{x^2-2x+2}-1} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\cos(\log^2 x)\cdot 2x^{-1}\log x}{(x-1)/\sqrt{x^2-2x+2}}$$

que vuelve a ser del tipo $0/0$. Derivar de nuevo llevaría a unas cuentas largas. Es más sencillo utilizar que cuando $x\to 1$ se tiene $2\cos(\log^2 x)x^{-1}\to 2$ y $\sqrt{x^2-2x+2}\to 1$. Estas cantidades que no participan en la indeterminación (no se anulan) se pueden sacar fuera del límite para obtener

$$2\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} \underset{\text{L'H}}{=} 2\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1} = 2.$$

La regla de L'Hôpital requiere que las indeterminaciones sean del tipo $0/0$ o ∞/∞. Cualquier otra hay que transformarla en una de ellas. Por ejemplo, $x\log x$ es del tipo $0\cdot(-\infty)$ cuando $x\to 0^+$. Resolvemos la indeterminación de la forma siguiente:

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{1/x} \overset{\infty/\infty}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Ya sabíamos que las indeterminaciones exponenciales ∞^0, 0^0 y 1^∞ se reducían a $0\cdot\infty$, que se relacionan con $0/0$ o ∞/∞ como antes, pasando la indeterminación al exponente. Por ejemplo, el límite que define el número e hecho con la regla de L'Hôpital (lo cual no es lo más conveniente), sería:

$$\lim_{x\to\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = \lim_{x\to\infty}\Big(e^{\log(1+1/x)}\Big)^x = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+1/x)}{1/x}} \underset{\text{L'H}}{=} e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(1+1/x)^{-1}(-1/x^2)}{-1/x^2}} = e^1 = e.$$

En realidad un cambio previo $x=1/y$, con $y\to 0$, habría simplificado los cálculos.

Las derivadas sucesivas de una función se denotan con superíndices, entre paréntesis para más de tres derivadas. Se suelen usar números romanos cuando se deriva menos de 5 o 6 veces, entendiendo las comillas como íes. Es decir, f', f'', f''', $f^{(iv)}$, $f^{(v)}$, $f^{(6)}$, $f^{(7)}$,… $f^{(n)}$. Por convenio $f^{(0)}=f$, algo así como decir que no derivar es quedarse con la función. Con esta notación, a cada función f que tiene n derivadas en un punto a se le asigna el *polinomio de Taylor* de orden n en a definido por

$$T_n(f,a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

que es realmente un polinomio de grado menor o igual que n.

Para $f(x) = e^x$ la fórmula para $T_n(f,0)$ es muy sencilla por la facilidad al derivar repetidamente la exponencial:

$$T_n(f,0)(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + +\frac{1}{n!}x^n.$$

En cambio, para $f(x) = \tan x$ no hay nada tan simple porque las derivadas se complican cada vez más. De $f'(x) = 1+\tan^2 x$, $f''(x) = 2\tan x + 2\tan^2 x$ y $f'''(x) = 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x$ se deduce

$$T_3(f,0)(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{2}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{3}.$$

Las derivadas de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se repiten cada cuatro órdenes de derivación y también dan lugar a polinomios de Taylor manejables. Por ejemplo, para $f(x) = \operatorname{sen} x$ se tiene

$$T_4\Big(f,\frac{\pi}{3}\Big)(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(x-\frac{\pi}{3}\Big) - \frac{1}{4}\Big(x-\frac{\pi}{3}\Big)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\Big(x-\frac{\pi}{3}\Big)^3 + \frac{1}{48}\Big(x-\frac{\pi}{3}\Big)^4.$$

El *teorema de Taylor* afirma que si f tiene n derivadas en a entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

En su versión con resto, precisa que si f tiene $n+1$ derivadas en un intervalo I que contiene a a entonces

$$f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para cualquier $x \in I$ y cierto ξ entre a y x que depende de ellos de una manera indeterminada.

De algún modo, lo que asegura el teorema de Taylor es que el polinomio de Taylor es el polinomio de grado a lo más n que mejor aproxima a la función en las cercanías del punto. La versión con resto cuantifica el error cometido.

Si tienes curiosidad por la teoría, te interesará notar que el límite que aparece en el teorema de Taylor se deduce inductivamente de la regla de L'Hôpital (por eso la hemos incluido en este apartado) ya que $T'_{n+1}(f,a) = T_n(f',a)$. Esto lleva a la pregunta de cómo deducir la regla de L'Hôpital (y el resto en el teorema de Taylor). Está basada en el *teorema del valor medio* que se aplica a cualquier función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y asegura la existencia de un $\xi \in (a,b)$ tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

El teorema del valor medio tiene una interpretación física que suena bastante convincente y por eso no iremos más atrás. Interpretando la función como el espacio y su variable como el tiempo, dice que la velocidad media coincide con la velocidad instantánea en algún momento. Si recorres $600\,km$ en $6\,h$ entonces en algún momento has ido a $100\,km/h$. Desde el punto de vista de las demostraciones matemáticas rigurosas esto no es admisible porque se basa en la idea preconcebida de que la derivada, la velocidad instantánea, es continua, lo cual deja de ser cierto en algunas situaciones extrañas. En realidad se prueba a partir del caso particular $f(a) = f(b)$, llamado *teorema de Rolle* que a su vez se deduce de que en algún punto de (a, b) debe haber un máximo o un mínimo, un punto ξ en el que ni se sube ni se baja localmente, lo que fuerza $f'(\xi) = 0$, es decir, a que haya una recta tangente horizontal.

Volviendo a temas menos teóricos, una de las aplicaciones del teorema de Taylor es el cálculo de límites. La llamada *notación de Landau* representa con $o\big((x-a)^n\big)$ una función que al ser dividida por $(x-a)^n$ tiende a cero cuando $x \to a$. De esta forma, el límite en el teorema de Taylor equivale a

$$f(x) = T_n(f,a)(x) + o\big((x-a)^n\big).$$

Si en un límite sustituimos $f(x)$ por esta expresión y quedan términos con $(x-a)^n$ entonces $o\big((x-a)^n\big)$ es comparativamente despreciable y se puede omitir. En algunos contextos se llama a este proceso *aproximar por infinitésimos*. La fórmula $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L$ con $L = \lim_{x\to a} g(x)\big(f(x)-1\big)$ que habíamos utilizado anteriormente para indeterminaciones 1^∞ se basa en que $t = e^{\log t}$ y para $t \to 1$ se cumple $\log t = t - 1 + o(t-1)$ por tanto, $\log f(x)$ se puede sustituir con seguridad por $f(x) - 1$ si $f(x)$ tiende a uno.

Por ejemplo, consideremos el límite aparatoso

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\big(2e^x - 2 - 2x - x^2\big)^2 - \operatorname{sen}(x^7)}{\big(\log(1+x)\big)^6 + \tan(x^8)}.$$

Si en el numerador sustituimos e^x por $T_n(f,a)(x) + o\big((x-a)^n\big)$ para $n \ge 3$ se tendrán términos que no se cancelan con $-2-2x-x^2$. Con esa idea en mente elegimos $n = 3$. Para $\log(1+x)$ en el denominador no hay problema de cancelación y elegimos $n = 1$ que es el primero para el que T_n es no nulo. Sabemos, usando T_1, que $\operatorname{sen} x$ y $\tan x$ son $x + o(x)$ y al sustituir x por x^7 y x^8, respectivamente, obtenemos términos comparativamente despreciables. En resumen, estamos empleando

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \log(1+x) = x + o(x), \quad \operatorname{sen}(x^7) = x^7 + o(x^7), \quad \tan(x^8) = x^8 + o(x^8).$$

Sustituyendo y dividiendo por x^6,

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\big(x^3/3 + o(x^3)\big)^2 - x^7 + o(x^7)}{\big(x + o(x)\big)^6 + x^8 + o(x^8)} = \lim_{x\to 0} \frac{\big(1/3 + o(x^3)/x^3\big)^2}{\big(1 + o(x)/x\big)^6} = \frac{1}{9}.$$

Se ha usado que, por definición, $o\big(x^3\big)/x^3 \to 0$ y $o(x)/x \to 0$. Con mayor razón, $o(x^7)/x^6$ y $o(x^8)/x^6$ también tienden a cero.

Con un poco de práctica, la gran mayoría de los límites de funciones que aparecen en los exámenes se pueden resolver a golpe de vista de esta forma y uno puede olvidarse de la regla de L'Hôpital. El precio que hay que pagar es que no es tan mecánico y, dependiendo de tus habilidades matemáticas, te puedes sentir más seguro con la regla de L'Hôpital.

La aproximación numérica de funciones con polinomios de Taylor no tiene tanto interés práctico hoy en día porque todos disponemos de calculadoras y además los algoritmos que utilizan estas no se basan en polinomios de Taylor (la razón es que solo garantizan buenas aproximaciones cerca de un punto). De todas formas, examinemos la situación aproximando $\operatorname{sen}\frac{1}{2}$ utilizando $T_6(f,0)$ con $f(x) = \operatorname{sen} x$. Las derivadas $f^{(n)}(0)$ con $0 \le n \le 6$ son muy fáciles de calcular y resultan 0, 1, 0, -1, 0, 1 y 0. Entonces al evaluar $T_6(f,0)$, que en realidad es un polinomio de grado 5, en $x = 1/2$ se deduce

$$T_6(f,0)\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3}{6} + \frac{(1/2)^5}{120} = \frac{1841}{3240} = 0{,}4794270\ldots$$

Con una calculadora se comprueba que $\operatorname{sen}\frac{1}{2} = 0{,}4794255\ldots$ así que la aproximación es muy buena. Todavía más, sin evaluar el seno con una calculadora sabemos que el error es de la forma $-2^{-7}(\cos\xi)/5040$ por la versión con resto del teorema de Taylor. De ξ solo sabemos que está entre 0 y 1/2 la estimación burda $0 \le \cos\xi \le 1$ prueba que la diferencia $\operatorname{sen}\frac{1}{2} - T_6(f,0)\big(\frac{1}{2}\big)$ es negativa y mayor que $-1{,}551\cdot 10^{-6}$. Esta cantidad está muy cerca del error real.

4. Máximos y mínimos

El teorema del valor medio asegura que si $f'(x) > 0$ para $x \in (a,b)$ entonces f es estrictamente *creciente* en (a,b). De la misma manera, si $f'(x) < 0$, la función será estrictamente *decreciente* en (a,b). El calificativo "estrictamente" significa que se excluye la posibilidad de que sea constante.

Si una función es creciente en $(x_0 - \delta, x_0)$ y decreciente en $(x_0, x_0 + \delta)$ para algún $\delta > 0$, claramente $f(x_0) \ge f(x)$ en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Se dice que la función alcanza un *máximo local* o *relativo* en $x = x_0$. Este máximo, el valor de $f(x_0)$, podría no ser *global* o *absoluto*. Es decir, nada garantiza que en un intervalo mayor siga cumpliéndose $f(x_0) \ge f(x)$.

De la misma forma, si una función es decreciente en $(x_0 - \delta, x_0)$ y creciente en $(x_0, x_0 + \delta)$ para algún $\delta > 0$, se dice que la función alcanza un *máximo local* o *relativo* en $x = x_0$.

La relación anterior con la derivada permite elaborar un procedimiento para hallar los máximos y mínimos locales y globales en un intervalo $I = [a,b]$. Debemos tomar en consideración:

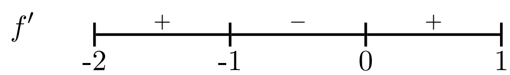
1. Los *puntos críticos* $f'(x) = 0$, porque allí puede cambiar el crecimiento.

2. Los puntos problemáticos $\nexists f(x)$, $\nexists f'(x)$, porque en ellos el análisis no funciona.
3. Los extremos de I, porque podrían alcanzarse máximos o mínimos globales allí.

Por ejemplo, consideremos $f(x) = 2\sqrt[3]{x^5} + 5\sqrt[3]{x^2}$ en $[-2, 1]$. Escribiendo la fórmula como $2x^{5/3} + 5x^{2/3}$, la derivada de esta función es

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{2/3} + \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{10}{3}x^{-1/3}(x+1).$$

Por tanto, $x = -1$ es un punto crítico y $x = 0$ es problemático porque, formalmente, la derivada da ∞. En un esquema, el signo de la derivada es



En $x = -1$ se pasa de creciente a decreciente, por tanto se alcanza un máximo local, que es $f(-1) = 3$. En $x = 0$ se pasa de decreciente a creciente, por tanto se alcanza un mínimo local, que es $f(0) = 0$. Como $\nexists f'(0)$ habríamos pasado por alto este punto si solo nos fiamos de los puntos críticos como candidatos a máximos o mínimos. Finalmente, en los extremos se tiene $f(-2) = \sqrt[3]{4} = 1{,}587\ldots$ y $f(1) = 7$. Como $f(1) > f(-1)$ el máximo local en $x = -1$ no es absoluto. Sin embargo el mínimo local en $x = 0$ sí lo es.

Este es un esquema de los cálculos y cómo se materializa el resultado en una gráfica:

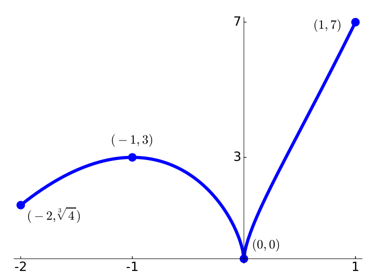
$f(x) = 2x^{5/3} + 5x^{2/3}$

$f'(x) = \frac{10}{3}x^{2/3} + \frac{10}{3}x^{-1/3}$
$\qquad = \frac{10}{3}x^{-1/3}(x+1)$

ceros: $x = -1$

$\nexists f'$: $x = 0$

extremos de I: $x = -2,\ x = 1$



El ejemplo anterior muestra que la información sobre crecimiento y decrecimiento es útil para representar gráficas. Sin ánimo de ser exhaustivo, otras cosas que se suelen examinar con este propósito son:

- Cortes con los ejes. Puntos $(0, f(0))$ y $(x_0, 0)$, con $f(x_0) = 0$.
- Asíntotas. *Horizontales*: $y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ y *verticales*: $x = a$ con $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.
- Concavidad y convexidad. Convexa: $f'' > 0$, tasa de crecimiento cada vez mayor. Cóncava: $f'' < 0$ tasa de crecimiento cada vez menor. Los puntos de cambio se llaman *puntos de inflexión*.

En la práctica, la concavidad y convexidad a veces lleva a cálculos demasiado complicados y se omite. En términos generales, hay que conseguir un balance entre la información que deseamos obtener y el esfuerzo que requiere.

Consideremos la función $f(x) = 1 + 3x^2e^{-x}$ el único corte con los ejes es $(0,1)$, porque $f(0) = 1$. Hay una asintótica horizontal $y = 1$ porque $x^2e^{-x} \to 0$ cuando $x \to +\infty$. No hay asíntotas verticales. Los cálculos relativos al crecimiento y decrecimiento y concavidad y convexidad están recogidos a continuación junto con la gráfica.

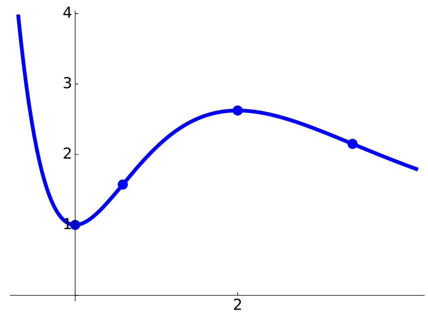
$$f(x) = 1 + 3x^2e^{-x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6xe^{-x} - 3x^2e^{-x} \\ &= -3x(x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

ceros: $x = 0, 2$

$$f''(x) = (3x^2 - 12x + 6)e^{-x}$$

ceros: $x = 2 - \sqrt{2},\ 2 + \sqrt{2}$



Consideremos ahora una función no derivable en algunos puntos definida por

$$f(x) = \frac{|x^2 + 2x - 3| - 5}{x+1}.$$

El polinomio $x^2 + 2x - 3$ se factoriza como $(x-1)(x+3)$, resolviendo la ecuación de segundo grado. Por tanto $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$ para $x \in [-3,1]$ y $|x^2 + 2x - 3| = x^2 + 2x - 3$ para $x \notin [-3,1]$. El corte con el eje Y es $(0,-2)$ y al igualar la función a cero para $x \notin [-3,1]$ se obtienen dos cortes con el eje X, $(-4,0)$ y $(2,0)$, y ninguno si $x \in [-3,1]$. Hay una asíntota vertical en $x = -1$ y no hay asíntotas horizontales. La información sobre la derivada y la gráfica son como sigue:

Para $x \in [-3,1]$, $\quad f(x) = \frac{-x^2-2x-2}{x+1}$

$f'(x) = -\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

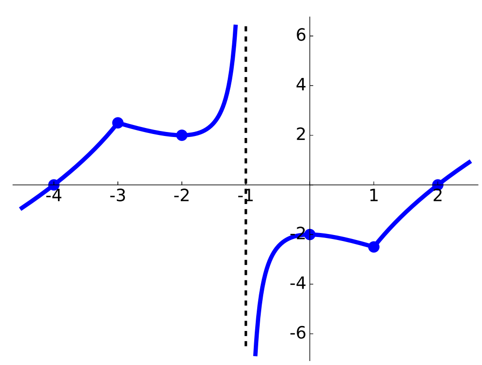
ceros: $x = 0, -2$

$\nexists f'$: $x = -1$

Para $x \notin [-3,1]$, $\quad f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x+1}$

$f'(x) = \frac{x^2+2x+10}{(x+1)^2}$

$\nexists$ ceros de f'



Se alcanzan máximos locales en $x = -3$ y $x = 0$ y mínimos locales en $x = -2$ y $x = 1$.

Posiblemente los problemas de máximos y mínimos que te resultarán más complicados sean los que requieren interpretar un enunciado hasta llegar a la función que uno desea estudiar.

Un ejemplo sencillo es la deducción de que el rectángulo con mayor área de perímetro 1 es en realidad un cuadrado. Si llamamos x e y a las longitudes de la base y la altura, el área es $A = xy$, pero esta es una función de dos variables. La condición del perímetro indica $2x + 2y = 1$ y con ello podemos eliminar la y escribiendo $y = 1/2 - x$ y llegando a la función de área $A(x) = x(1/2 - x)$. El intervalo natural es $[0, 1/2]$ porque las longitudes no pueden ser negativas ni la longitud de un lado puede superar a la mitad del perímetro. Los cálculos son muy sencillos y resumidos en:

$$A'(x) = \frac{1}{2} - 2x = 0 \ \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \qquad A' \quad \begin{array}{ccccc} & + & & - & \\ 0 & & 1/4 & & 1/2 \end{array}$$

Entonces se alcanza un máximo en $x = 1/4$ lo que corresponde a que la base mida $x = 1/4$ y la altura $y = 1/2 - x$ tenga la misma longitud.

Un ejemplo algo más complicado es diseñar una lata cilíndrica con tapas que tenga volumen 2π gastando la mínima cantidad de material en su superficie. Tal superficie vendrá dada por el área lateral y la de las dos tapas, es decir

$$S = 2\pi Rh + \pi R^2 + \pi R^2 \qquad \text{con } R = \text{radio de las tapas}, \quad h = \text{altura}.$$

Para eliminar una variable empleamos que el volumen es $2\pi = \pi R^2 h$, entonces $h = 2/R^2$ y, sustituyendo, llegamos a la función de una variable

$$S(R) = 2\pi R^2 + \frac{4\pi}{R} \qquad \text{para} \quad R > 0.$$

Su derivada es $4\pi R - 4\pi/R^2$ lo que lleva al punto crítico $R = 1$. Para $R < 1$ el signo de S' es negativo y para $R > 1$ es positivo, por tanto se alcanza un mínimo. Así pues, el diseño con el gasto mínimo tiene $R = 1$ y $h = 2/1^2 = 2$. Este resultado difiere mucho de las dimensiones habituales de las latas de refrescos. Una razón principal para ello es que estas no son homogéneas en absoluto: tienen la mayor parte de su masa en las tapas.