Números reales y complejos

Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación

Curso: Análisis Matemático I   Profesor: Fernando Chamizo

1. El principio de inducción

Esta sección inicial es singular dentro del curso porque es más teórica, ocupándose de un método para demostrar fórmulas que involucran *números naturales*. Recuerda, estos son los números que sirven para contar:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

y constituyen el conjunto de números más básico de todos.

El principio de inducción dice que habremos probado que una propiedad (fórmula) se cumple para todos los n en $\mathbb{N}$ si completamos las dos tareas siguientes:

1. Verificar que se cumple para $n = 1$.
2. Suponiendo que es cierta para n, deducirla para $n + 1$.

La suposición de que la propiedad es cierta para n se suele llamar *hipótesis de inducción*.

La idea que hay debajo es una versión sofisticada del "y así sucesivamente" que se usa en muchos razonamientos. Si tengo unas fila de fichas de dominó y se cae la primera, entonces se cae también la segunda y después la tercera, y así sucesivamente. El primer punto de la inducción asegura que se comience el proceso y el segundo asegura que continúa en cada paso.

Para probar por inducción la fórmula

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{para} \quad n \in \mathbb{N},$$

primero comprobamos que es cierta para $n = 1$. Esto es tan sencillo, sustituyendo, como decir que se cumple $1 = 1 \cdot (1 + 1)/2$.

Para simplificar, llamemos S_n al primer miembro de la fórmula. Lo que me pide el segundo punto de inducción es que suponiendo $S_n = n(n + 1)/2$ sea capaz de deducir la igualdad

$S_{n+1} = (n+1)(n+2)/2$. Para ello busco una relación entre S_n y S_{n+1} que, claramente, es $S_{n+1} = S_n + (n+1)$. Así, se tiene

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) \stackrel{\text{HI}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\Big(\frac{n}{2}+1\Big) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

y ya hemos completado la deducción que nos pedía el segundo punto. El paso señalado con HI es en el que se está usando la hipótesis de inducción, la suposición.

Una pequeña variante del método de inducción es cambiar en el primer punto $n = 1$ por $n = n_0$ con n_0 otro número natural (o incluso entero). Entonces la prueba solo se aplicará a $n \geq n_0$. Es como si en las fichas de dominó empujamos la que está en el lugar n_0, en ese caso solo se caerán las que la siguen. La motivación de esta variante es que algunas fórmulas carecen de sentido para ciertos valores pequeños o, al revés, son más naturales empezando por $n = 0$, o incluso más atrás.

Por ejemplo, probemos por inducción

$$\prod_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big) = \frac{n+1}{2n} \qquad \text{para} \quad n \geq 2.$$

Esta fórmula no tendría sentido literal para $n = 1$ pues el símbolo inicial indica tomar el producto cuando k se incrementa desde 2 hasta n.

Para $n = 2$ es cierta, pues se reduce a $(1 - 1/2^2) = (2+1)/4$. Llamemos al producto $\mathcal{P}_n$. Suponemos $\mathcal{P}_n = (n+1)/(2n)$ y queremos deducir $\mathcal{P}_{n+1} = (n+2)/(2n+2)$. Para ello, como antes, relacionamos $\mathcal{P}_n$ y $\mathcal{P}_{n+1}$:

$$\mathcal{P}_{n+1} = \mathcal{P}_n\Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big) \stackrel{\text{HI}}{=} \frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Otro ejemplo consiste en demostrar que $n^3 + 2n$ es siempre múltiplo de 3. Se cumple obviamente para $n = 1$. Por otro lado, la igualdad

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1)$$

muestra que si suponemos que $n^3 + 2n$ es múltiplo de 3 entonces $(n+1)^3 + 2(n+1)$ también lo será, completando la inducción.

Aunque el principio de inducción suene muy teórico, tiene que ver con el diseño de muchos algoritmos que reducen un problema a otro anterior más sencillo. Si te gusta programar, quizá te suenen las funciones recursivas, que se llaman a sí mismas. Por ejemplo, si queremos diseñar una función `fact` que calcule el factorial de un número natural, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, en vez de un bucle se pueden escribir simplemente dos líneas, una que devuelva 1 si $n = 1$ (primer paso de inducción y otra que devuelva en el resto de los casos `n*fact(n-1)`, lo cual corresponde al segundo paso de inducción salvo desplazar la n, porque indica cómo obtener el caso n a partir del caso $n - 1$.

2. Conjuntos de números y sus operaciones

Ya conoces los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, los *números enteros*, que añaden los negativos y el cero, $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$, los *racionales* $\mathbb{Q} = \{\text{fracciones}\}$ y los *reales* $\mathbb{R}$, que imaginamos como puntos de una línea. En principio también deberías conocer los *complejos* $\mathbb{C}$, que seguramente te parecerán algo raro que "no existe".

Aunque históricamente las cosas sean más complicadas, se pueden entender $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ como extensiones de $\mathbb{N}$ que solventan el problema de que no podamos efectuar algunas de las operaciones elementales.

	$+$	$-$	$\times$	$\div$
$\mathbb{N}$	Sí	No	Sí	No
$\mathbb{Z}$	Sí	Sí	Sí	No
$\mathbb{Q}$	Sí	Sí	Sí	Sí*

(*) Salvo por cero

En principio $\mathbb{R}$ parece innecesario porque podemos hacer las mismas operaciones elementales que en $\mathbb{Q}$, pero ya los antiguos griegos descubrieron que en algunas de sus construcciones geométricas aparecían longitudes que no eran racionales, por ejemplo la diagonal de un cuadrado de lado 1.

Dentro de la teoría actual, intuitivamente los reales completan los "huecos" que quedan entre los racionales y esto está relacionado con tomar límites, lo cual es una necesidad básica del análisis matemático.

Sin entrar en las complicaciones de la teoría, seguramente sepas que al dividir una fracción se obtienen cifras decimales que se acaban o que se repiten indefinidamente. Por ejemplo:

$$\frac{1}{8} = 0{,}125, \qquad \frac{7}{11} = 0{,}545454\dots, \qquad \frac{2}{7} = 0{,}285714285714\dots$$

Sin embargo, te puedes imaginar un número decimal que ni se acaba ni se repite, por ejemplo

$$\alpha = 0{,}101001000100001\dots$$

Este número está entre 0,1 y 0,2, que son racionales, y también entre 0,101001 y 0,101002, que siguen siéndolo. Podemos imaginar infinidad de pares de números racionales por debajo y por encima de α, pero nunca lo alcanzarán. De alguna manera, los racionales dejan "huecos" y α está en uno de ellos.

Por otro lado, $\mathbb{C}$ proviene de la necesidad de resolver ecuaciones algebraicas (hallar raíces de polinomios). Al menos es lo que diría un matemático, pero eso no hace justicia a la cantidad de aplicaciones que tienen en física e ingeniería no relacionadas directamente con esta necesidad. Como veremos, geométricamente $\mathbb{C}$ se asocia a un plano mientras que sabemos que $\mathbb{R}$ corresponde a una recta.

3. Desigualdades y acotación

Los números reales muchas veces se representan como los puntos de una recta horizontal, lo cual les da una ordenación natural (más grande cuanto más a la derecha) y permite establecer desigualdades. La distancia entre dos puntos $a, b \in \mathbb{R}$ es $|a-b|$ donde las barras representan el *valor absoluto*:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Una *desigualdad* está compuesta por dos expresiones ligadas por los símbolos, $<$, $<$, $\leq$ o $\geq$. Sumando o restando a ambos miembros de una desigualdad una misma cantidad, resulta otra equivalente. Por otro lado, si multiplicamos ambos miembros por un número real positivo, la desigualdad se conserva, pero si es negativo, cambia el sentido de la desigualdad. Por ejemplo, al multiplicar $-2 < 3$ por 5 se obtiene $-10 < 15$, que sigue siendo cierto. Al multiplicar por -5 se cambia el sentido a $10 > -15$. Dicho sea de paso, dos desigualdades similares se pueden sumar, pero, en general, el resto de las operaciones fallan.

Un problema típico es hallar para qué valores de un parámetro real x se cumple una desigualdad. Siempre puedes seguir el procedimiento de estudiar los casos que corresponden a diferentes signos de los denominadores o de los argumentos de los posibles valores absolutos, aunque a veces hay atajos.

Por ejemplo, determinemos los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{x+1}{x+11} \leq 6.$$

Discutimos dos casos:

1. Si $x > -11$ podemos quitar el denominador para obtener $x + 1 \leq 6x + 66$ que produce $x \geq -13$.
2. Si $x < -11$ el denominador es negativo y al quitarlo se cambia el sentido de la desigualdad y resulta $x \leq -13$.

No se considera $x = -11$ porque el primer miembro no tendría sentido. En el primer caso, $x \geq -13$ es superfluo si imponemos $x > -11$. Es decir, tenemos el intervalo $(-11, \infty)$. De la misma forma, $x < -11$ no aporta nada en el segundo caso una vez que sabemos $x \leq -13$. En forma de intervalo, $(-\infty, -13]$. En total, el resultado es

$$x \in (-\infty, -13] \cup (-11, \infty).$$

Otra forma de proceder es escribir el enunciado como $1 - 10/(x+11) \leq 6$, esto es, $-1/2 \leq 1/(x+11)$. Si $x + 11 > 0$, es obvio que se cumple, lo que da el intervalo $(-11, \infty)$ y si $x + 11 < 0$, está claro que debe cumplirse $x + 11 \leq -2$ de donde se obtiene $(-\infty, -13]$.

Otro ejemplo es hallar los valores $x \in \mathbb{R}$ que verifican

$$|x-4| < |x+1|.$$

Analicemos primero la solución discutiendo casos. A la derecha y a la izquierda de $x = 4$ y $x = -1$ hay que cambiar de definición en alguno de los valores absolutos, lo que da lugar a tres situaciones:

1. Si $x < -1$ entonces $|x-4| = -x+4$ y $|x+1| = -x-1$. Al sustituir se obtiene $4 < -1$, que no se cumple, por tanto no hay soluciones en este caso.
2. Si $-1 \le x < 4$ entonces $|x-4| = -x+4$ y $|x+1| = x+1$. Al sustituir se sigue $x > 3/2$.
3. Si $4 \le x$ entonces $|x-4| = x-4$ y $|x+1| = x+1$. De nuevo se cancela la variable y se obtiene $0 < 5$ que se cumple siempre.

La conclusión es que la desigualdad se verifica para

$$(3/2, 4) \cup [4, \infty) = (3/2, \infty).$$

Una manera más rápida de llegar a la solución es escribiendo el enunciado como $d(x,4) < d(x,-1)$, donde d indica la distancia en la recta real. El punto a medio camino entre 4 y -1 es $(4+(-1))/2 = 3/2$, así que la solución son los puntos en el lado de 4, el de la derecha, a partir de este punto medio.

Dado $A \subset \mathbb{R}$, se dice que A está *acotado superiormente* y que C es una *cota superior* si se cumple $x \le C$ para todo $x \in A$. De la misma forma, se dice que está *acotado inferiormente* y que c es una *cota inferior* si se cumple $c \le x$ para todo $x \in A$.

Si solo se dice que A está acotado, sin especificar, se entiende que lo está superior e inferiormente.

Por ejemplo, $A = [-3, 2023)$ está acotado. Una cota superior es por ejemplo un millón y -3 es válida como cota inferior.

La propiedad que tiene $\mathbb{R}$ de rellenar los "huecos" de $\mathbb{Q}$, lo que se llama *completitud* en matemáticas, se traduce en este contexto en que todo conjunto acotado A tiene un *supremo* y un *ínfimo*:

- El supremo es la cota superior mínima, denotado mediante $\sup A$. Si $\sup A \in A$, se dice que es *máximo*.
- El ínfimo es la cota inferior máxima, denotado mediante $\inf A$. Si $\inf A \in A$, se dice que es *mínimo*.

Si $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1/2, 1/3, \dots\}$, se tiene que $\sup A = 1$ y es máximo porque a partir del segundo elemento todos son menores que 1. Por otro lado, como $1/n$ se va haciendo cada vez más pequeño sin anularse, $\inf A = 0$. El ínfimo es 0 porque no existe ninguna cota inferior $c > 0$, ya que $1/n$ se hace tan pequeño como queramos y a la larga tendríamos $1/n < c$, contradiciendo que es cota inferior. No hay mínimo porque $0 \notin A$.

Intuitivamente, el supremo de un conjunto es el número que está por encima y pegado a él y el ínfimo, lo mismo, pero por debajo. Así en un intervalo finito el supremo y el ínfimo son sus extremos superior e inferior.

Para $A = [-3, 2023)$ se tendría $\inf A = -3$ y $\sup A = 2023$. El primero es mínimo y no hay máximo. Considerando $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ vemos que si no se hubieran inventado los números reales este conjunto acotado no tendría supremo e ínfimo, ya que $\sup A = \sqrt{2}$ e $\inf A = -\sqrt{2}$, que no pertenecen a $\mathbb{Q}$. Para $A = [-4, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$, el ínfimo es -4, y es el mínimo, y el supremo es $\sqrt{2}$. No hay máximo porque $\sqrt{2}$ no está en $\mathbb{Q}$.

Un ejemplo un poco más complicado es

$$A = \Big\{ \frac{x^2+1}{x^2+11} : x \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Procediendo como en un ejemplo anterior de desigualdades, escribimos la fracción del enunciado como $1 - 10/(x^2 + 11)$. Esta expresión será más pequeña cuanto más restemos y esto equivale a que el denominador sea lo menor posible, lo que ocurre para $x = 0$. Así pues, $\inf A = 1 - 10/11 = 1/11$ y es mínimo. Por otro lado, será mayor cuanto menos restemos, lo que corresponde a tomar x muy grande. Se tiene $\sup A = 1$ y como nunca se llega a 1, no hay máximo.

4. Los números complejos

Una vez que hemos completado con $\mathbb{R}$ todos los huecos de $\mathbb{Q}$, parece que no es necesario inventar más números. Sin embargo en bachillerato te hablaron de los *números complejos*, $\mathbb{C}$, una extensión de $\mathbb{R}$ que constituye un choque frontal con la abstracción. Seguramente tienes la sensación de que el resto de los conjuntos de números existen y estos no. En cierto modo, todas las construcciones matemáticas son artificiales. Más allá de las discusiones filosóficas sobre su existencia en el mundo real, el caso es que son muy importantes en ingeniería, para estudiar temas bien concretos (ondas, circuitos, filtros…) y es totalmente necesario que sepas trabajar con números complejos.

La forma habitual de introducir $\mathbb{C}$ es como el conjunto $\{x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ donde i es “algo” que cumple $i^2 = -1$.

Dado un número complejo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se dice que x es su *parte real* y que y es su *parte imaginaria*. A veces se denotan con $\Re(z)$ o $\mathrm{Re}(z)$ y con $\Im(z)$ o $\mathrm{Im}(z)$. Asociado a un número complejo z está su *conjugado* $\overline{z}$ que se obtiene cambiado la parte imaginaria de signo. Esto es, si $z = x + iy$, siempre con $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple $\overline{z} = x - iy$. El conjugado respeta las operaciones elementales, que repasaremos a continuación, es decir, $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ y $\overline{z_1/z_2} = \overline{z}_1/\overline{z}_2$.

Aunque utilices calculadoras u ordenadores para hacer cuentas, es importante que conozcas la mecánica de las operaciones elementales en $\mathbb{C}$. Esencialmente lo que tienes que saber es:

- Sumas y restas $\to$ triviales.
- Multiplicación $\to$ emplear $i^2 = -1$.
- División $\to$ multiplicar por el conjugado del denominador.

Respecto al último punto, observa que para $z = x + iy$ se tiene $z \cdot \overline{z} = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$. El método para hacer divisiones se basa en que con la multiplicación por el conjugado se consigue que el denominador pase a ser real.

Por ejemplo, si $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 3 - i$, no cuesta nada calcular $z_1 + z_2 = 4 + i$ y $z_1 - z_2 = -2 + 3i$. Para la multiplicación se operan de la forma habitual los paréntesis: $z_1z_2 = 3 - i + 6i - 2i^2 = 5 + 5i$, donde se ha usado $i^2 = -1$. La división, hecha muy despacio, sería:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{3-i} = \frac{(3+i)(1+2i)}{3^2+1^2} = \frac{3+6i+i+2i^2}{10} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

Mucho tiempo después de que se introdujeran los números complejos, se llego a la idea de que era conveniente asociarlos a vectores en $\mathbb{R}^2$. El número complejo $z = x + iy$ corresponde al vector (x, y). La longitud de este vector es, por el teorema de Pitágoras, $\sqrt{x^2 + y^2}$, la raíz cuadrada del producto $z\overline{z}$ que usamos en la división. Esta longitud del vector es lo que se llama *módulo* o *valor absoluto* del número complejo z y se indica con $|z|$. La suma y resta de vectores es coherente con la suma y resta de números complejos, por tanto se cumple la llamada *desigualdad triangular* que dice que la longitud de la suma de dos vectores no puede medir más que la suma de sus longitudes. En una fórmula, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

En principio, dibujar en el plano los números complejos parece arbitrario. Las cosas se vuelven más interesante si describimos el vector asociado en coordenadas polares en vez de en coordenadas cartesianas. Esto es, especificando cuánto mide, $r = |z|$, y qué ángulo α forma con el eje OX (la parte positiva del eje X). Este ángulo siempre se considera en sentido contrario a las agujas del reloj y se expresa en radianes. Recuerda que π radianes es lo mismo que 180°. Por supuesto, uno puede entrar en ambigüedades con el ángulo porque 0 indica lo mismo que 2π. La tradición matemática es expresar los ángulos en el rango $(-\pi, \pi]$ o en $[0, 2\pi)$. Aquí van algunos ejemplos con asignaciones de r y α:

z	r	α
i	1	$\pi/2$
-1	1	π
$1-i$	$\sqrt{2}$	$-\pi/4$

z	r	α
$1+i\sqrt{3}$	2	$\pi/3$
$3+4i$	5	$0{,}927295\ldots$
$3-4i$	5	$-0{,}927295\ldots$

Las fórmulas que relacionan (x, y) con (r, α) son simple trigonometría, las mismas que expresan el cambio entre coordenadas cartesianas y polares:

$$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\operatorname{sen}\alpha,$$

que podemos invertir mediante $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, α"$=$" $\arctan(y/x)$ con cierta precaución en la última fórmula con respecto a lo que nos diga una calculadora porque nos dará los mismos resultados para z y $-z$, aunque sus ángulos son diferentes. Esto se debe a que hay una indeterminación de un múltiplo de π en el resultado de arctan y las calculadoras lo deciden siempre reduciendo el rango a $(-\pi/2, \pi/2)$. Algunos lenguajes de programación incorporan una función de dos argumentos llamada `atan2`, justamente para evitar esta ambigüedad.

Según las fórmulas anteriores, cada número complejo $z = x + iy$ se puede representar en la forma:

$$z = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) \qquad \text{con} \quad r = |z|.$$

La gracia de todo esto es que, en términos de módulos y ángulos, las multiplicaciones y divisiones son muy fáciles:

- $z_1 z_2 \to$ producto de módulos, suma de ángulos.
- $z_1/z_2 \to$ cociente de módulos, resta de ángulos.

El comportamiento de los módulos depende de la inesperada relación $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ y el de los ángulos, de las fórmulas trigonométricas de adición. También se cumple que z^s se calcula elevando el módulo a s y multiplicando el ángulo por s, aunque si s no es un número natural, como veremos, aparecen resultados múltiples.

La situación es más clara cuando se utiliza la notación exponencial basada en la enigmática fórmula

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$$

que justificaremos más adelante en el curso. Con ella,

$$z = re^{i\alpha} \qquad \text{y se sigue inmediatamente} \qquad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

Por ejemplo, podríamos calcular $i/(1+i)^3$ mediante

$$\frac{i}{(1+i)^3} = \frac{e^{i\pi/2}}{\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4},$$

donde en el último paso se ha usado $\cos(-\pi/4) = -\sin(-\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

De la relación $e^{in\alpha} = \left(e^{i\alpha}\right)^n$ con $n \in \mathbb{N}$ se deduce la *fórmula de Moivre*

$$\cos(n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha) = (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n.$$

Por ejemplo, para $n = 2$ se obtiene operando

$$\cos(2\alpha) + i\,\mathrm{sen}(2\alpha) = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha + 2i\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha.$$

Tomando partes reales e imaginarias se siguen las famosas fórmulas del ángulo doble para seno y coseno.

La simplicidad del cálculo de potencias permite obtener algunos resultados espectaculares:

$$\Big(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^{2023} = e^{\frac{2\pi i}{3}\cdot 2023} = e^{\frac{2\pi i}{3}\cdot(674\cdot 3+1)} = e^{2\pi i\cdot 674}\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}.$$

La descomposición $2023 = 674\cdot 3+1$ corresponde a la división inexacta de 2023 entre 3 y su propósito es cancelar el denominador con el divisor para quedarnos con el resto.

Para terminar, hagamos una pequeña incursión en las potencias de exponente fraccionario. No hay que perder de vista que hay ambigüedad en el ángulo que se traduce en $e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+2\pi k)}$ para $k \in \mathbb{Z}$. Por ello, aparece cierta multiplicidad al extraer raíces n-ésimas, ya que $e^{i(\alpha+2\pi k)/n}$ toma valores distintos dependiendo del k escogido. Cambiar $k \mapsto k+n$ no tiene ningún efecto, por tanto cada $z \in \mathbb{C}$ no nulo tiene n raíces n-ésimas dadas por

$$r^{1/n}e^{i(\alpha+2\pi k)/n} \qquad \text{con} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Multiplicando los exponentes por m se tendría una fórmula para z elevado a cualquier fracción irreducible m/n.

Para $n = 2$ se obtienen dos raíces cuadradas, una y su negativa, porque $e^{i\pi} = -1$. Esta última fórmula se considera una de las más bellas de las matemáticas.

Por ejemplo las raíces cuadradas de $z = 4i$ son:

$$2e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad 2e^{i(\pi/2+2\pi)/2} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Un cálculo sencillo muestra que verdaderamente $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^2 = 4i$.

Como $-8 = 8\,e^{i\pi}$, las raíces cúbicas de -8 vienen dadas por

$$\big\{2\,e^{i(\pi+2\pi k)/3}\big\}_{k=0,1,2} \longrightarrow 2\,e^{\pi i/3} = 1+i\sqrt{3}, \quad 2\,e^{\pi i} = -2, \quad 2\,e^{\pi 5\pi i/3} = 1-i\sqrt{3}.$$

Si queremos comprobar el resultado, un cálculo más laborioso muestra que $(1 \pm i\sqrt{3})^3 = -8$. En realidad, basta comprobar $(1+i\sqrt{3})^3 = -8$ porque el conjugado respeta los productos.