Soluciones de la Hoja 5

Nota: Si necesitas más detalles sobre la solución de algún problema, pregunta. Recuerda que los ejercicios marcados con * no constituyen materia de examen. Para ellos la solución no tiene explicaciones.

1) Muestra que $\int_0^x |t|\,dt = \frac{1}{2}x|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \ge 0$ entonces t toma valores mayores o iguales que cero. Por tanto $|t| = t$ y la integral es $\int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x|x|$. Análogamente, si $x \le 0$ entonces t toma valores menores o iguales que cero. Por tanto $|t| = -t$ y la integral es $-\int_0^x t\,dt = -\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x|x|$ (porque $|x| = -x$).

---

2) Escribe $a_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$ como $a_n = \frac{1}{n}\Big(f\big(\frac{1}{n}\big) + f\big(\frac{2}{n}\big) + \cdots + f\big(\frac{n}{n}\big)\Big)$ para cierta f y utiliza el resultado para hallar el límite de a_n como una integral.

La fórmula que define a_n se puede escribir como

$$\frac{1}{n}\Big(\frac{n^2}{n^2+1^2} + \frac{n^2}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2+n^2}\Big) = \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{1+1^2/n^2} + \frac{1}{1+2^2/n^2} + \cdots + \frac{1}{1+n^2/n^2}\Big).$$

Así pues, se cumple la igualdad del enunciado con $f(x) = 1/(1+x^2)$. De acuerdo con la definición inicial de integral, con $h_n = 1/n$, se tiene $\int_0^1 f = \lim a_n$. Una primitiva de f es $\arctan x$, por tanto $\lim a_n$ es igual a $\arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$.

---

3) Empleando el teorema fundamental del cálculo, muestra que la integral $\int_{\pi/2}^x \operatorname{cosec} t\,dt$ es igual a $\log\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ para $x \in [\pi/2, \pi)$.

Por las propiedades de los logaritmos la función f al final del enunciado es

$$f(x) = \frac{1}{2}\log(1-\cos x) - \frac{1}{2}\log(1+\cos x).$$

Derivando,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} - \frac{-\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\Big) = \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{cosec} x.$$

Es decir, $f(x)$ es una primitiva de $\operatorname{cosec} x$. Entonces la integral es $f(x) - f(\pi/2)$ y basta notar $f(\pi/2) = \log\sqrt{1/1} = 0$.

4) Halla $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log t}$. Indicación: Da por supuesto (o prueba) $\int_2^\infty \frac{dt}{\log t} = \infty$ y aplica la regla de L'Hôpital aislando la integral en el numerador.

El límite pedido L se escribe como

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_2^x \frac{dt}{\log t}}{\frac{x}{\log x}} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_2^x \frac{dt}{\log t}\right)'}{\left(\frac{x}{\log x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\log x}}{\frac{\log x - 1}{\log^2 x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log x - 1} = 1.$$

La última igualdad se sigue dividiendo numerador y denominador entre $\log x$ o, si se prefiere, aplicando la regla de L'Hôpital una vez más.

En la primera aplicación nos hemos creído $\int_2^\infty \frac{dt}{\log t} = \infty$ que asegura que tenemos una indeterminación ∞/∞. Si no quieres darlo por supuesto, puedes deducirlo usando $\log t \le t$ y, por tanto, $1/\log t \ge 1/t$.

5) Calcula la derivada de $\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} e^{-t^2}\, dt$.

Según la regla de Barrow, esta función es

$$f(x) = F(\cos x) - F(\operatorname{sen} x) \qquad \text{con} \quad F'(t) = e^{-t^2}.$$

Por la regla de la cadena, la derivada es:

$$f'(x) = F'(\cos x)(-\operatorname{sen} x) - F'(\operatorname{sen} x)\cos x = -(\operatorname{sen} x)e^{-\cos^2 x} - (\cos x)e^{-\operatorname{sen}^2 x}.$$

6) Intenta calcular primitivas de las siguientes funciones directamente, sin aplicar técnicas especiales de integración: $f_1(x) = \tan x$, $f_2(x) = (x\log x)^{-1}$, $f_3(x) = \big(\cos\sqrt{x}\big)/\sqrt{x}$.

En todos los casos la idea pasa por escribir el enunciado de forma que se pueda aplicar La regla de la cadena implica

$$\int f'(g(x))g'(x)\, dx = f(g(x)) + K.$$

Para f_1, $f(x) = 1/x$ y $g(x) = \cos x$ compensando un signo:

$$\int f_1 = -\int \frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x)\, dx = -\log\cos x + K.$$

Para f_2, $f(x) = 1/x$ y $g(x) = \log x$:

$$\int f_2 = \int \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \log\log x + K.$$

Para f_3, $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ compensando un factor $1/2$:

$$\int f_3 = 2\int \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}\, dx = 2\operatorname{sen}\sqrt{x} + K.$$

---

7) Utiliza el método de integración por partes para calcular $\int \operatorname{sen}(\log x)\, dx$.

Escogiendo $u = \operatorname{sen}(\log x)$ y $dv = dx$, la fórmula de integración por partes implica que la integral I buscada cumple

$$I = x\operatorname{sen}(\log x) - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos(\log x)\, dx = x\operatorname{sen}(\log x) - \int \cos(\log x)\, dx.$$

Aplicando, de nuevo, la fórmula de integración por partes a la última integral con $u = \cos(\log x)$ y $dv = dx$, se obtiene

$$I = x\operatorname{sen}(\log x) - \Big(x\cos(\log x) + \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen}(\log x)\, dx\Big).$$

La última integral es justamente I, así que despejando obtenemos

$$I = \frac{1}{2}x\operatorname{sen}(\log x) - \frac{1}{2}x\cos(\log x) + K.$$

---

8) Halla $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x\, dx$.

Integrando por partes dos veces conseguiremos que el polinomio x^2+1 pase a ser una constante. Con $u = x^2+1$, $dv = e^x dx$ se obtiene que la integral, digamos I, es

$$I = (x^2+1)e^x\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2xe^x\, dx = 1 - 2e^{-1} - 2\int_{-1}^{0} xe^x\, dx$$

En la última integral tomamos $u = x$ y $dv = e^x dx$, resultando

$$\int_{-1}^{0} xe^x\, dx = x\,e^x\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^x\, dx = e^{-1} - (1 - e^{-1}).$$

Sustituyendo, se concluye

$$I = 1 - 2e^{-1} - 2(2e^{-1} - 1) = 3 - 6e^{-1}.$$

---

9) Calcula una primitiva de $f(x) = (x-1)(2\log(x+1) - 1)$. Indicación: Toma como partes cada uno de los factores.

Siguiendo la indicación, $u = 2\log(x+1) - 1$, $dv = (x-1)\,dx$. Así pues lo natural es tomar $v = \frac{1}{2}x^2 - x$ (en realidad, se conseguiría una reducción drástica tomando $v = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$, pero es tan poco natural que dudo que alguien siga ese camino). Entonces

$$\int f = (2\log(x+1) - 1)\Big(\frac{1}{2}x^2 - x\Big) - \int \Big(\frac{1}{2}x^2 - x\Big)\frac{2}{x+1}\,dx.$$

Operando y aplicando el proceso de reducción, la última integral es

$$\int \frac{x^2 - 2x}{x+1}\,dx = \int \Big(x - 3 + \frac{3}{x+1}\Big)\,dx = \frac{1}{2}x^3 - 3x - 3\log(x+1) + K.$$

El valor absoluto en el logaritmo no es necesario porque si $x + 1 < 0$ entonces $f(x)$ no tendría sentido.

Sustituyendo y operando, se obtiene finalmente

$$\int f = (x^2 - 2x - 3)\log(x+1) - x^2 + 4x + K.$$

---

10) Halla el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{3x+3}{x^2-5x+4}$ y el eje X en el intervalo $[2,3]$.

De acuerdo con la teoría, hay que calcular $\int_2^3 |f|$. El numerador de f es claramente positivo en $[2,3]$ y el denominador es negativo porque $x^2-5x+4 = (x-1)(x-4)$. Por tanto, el área buscada viene dada por $A = -\int_2^3 f$. Esta es la integral de una función racional. Descomponiendo en fracciones simples,

$$\frac{3x+3}{x^2-5x+4} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-4} \qquad \Rightarrow \qquad 3x+3 = A_1(x-4) + A_2(x-1).$$

Sustituyendo $x = 1$ y $x = 4$ se obtienen, respectivamente, $A_1 = -2$, $A_2 = 5$. Así pues,

$$A = \int_2^3 \Big(\frac{2}{x-1} - \frac{5}{x-4}\Big)\,dx = \big(2\log|x-1| - 5\log|x-4|\big)\Big|_2^3 = 2\log 2 - 0 - (0 - 5\log 2)$$

que operando da $A = 7\log 2$.

***11)** Calcula $\int \frac{x^3+1}{x^3+x}\,dx$.

El resultado de la integral es $x + \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \arctan x + K$.

***12)** Calcula $\int \frac{x+7}{x^3+5x^2+3x-9}\,dx$.

El resultado de la integral es $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+3| + K$.

---

13) Resuelve la integral $\int_{-2}^{7}\left(2+\sqrt{2+x}\right)^{-1}dx$ empleando un cambio de variable.

El cambio más natural es $2 + x = t^2$ para quitar la raíz. Con él, $dx = 2t\,dt$. Los límites de integración se cambian de la siguiente forma: $x = -2 \mapsto t = 0$, $x = 7 \mapsto t = 3$. Con ello,

$$\int_{-2}^{7}\left(2+\sqrt{2+x}\right)^{-1}dx = \int_0^3 \frac{1}{2+t}\cdot 2t\,dt = \int_0^3 \frac{2t}{t+2}\,dt.$$

Dividiendo los polinomios para aplicar el proceso de reducción, $2t = 2(t+2) - 4$. Por consiguiente,

$$\int_{-2}^{7}\left(2+\sqrt{2+x}\right)^{-1}dx = \int_0^3 \left(2 - \frac{4}{t+2}\right)dt = \left(2t - 4\log|t+2|\right)\Big|_0^3.$$

Operando, esto resulta $6 - 4\log 5 + 4\log 2$.

---

14) Calcula $\int \left(9e^x + e^{-x}\right)^{-1}dx$.

El cambio natural es $e^x = t$, equivalentemente, $t = \log x$. De esta forma $dx = t^{-1}\,dx$ y la integral pasa a ser

$$\int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{9t+t^{-1}} = \int \frac{dt}{9t^2+1} = \frac{1}{3}\int 3\frac{dt}{(3t)^2+1} = \frac{1}{3}\arctan(3t) + K.$$

Deshaciendo el cambio, la integral original es $\frac{1}{3}\arctan(3e^x) + K$.

***15)** Halla el área entre la gráfica de $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ y su negativa en el intervalo $[0, 1]$.

El área es $1 + \frac{\pi}{2}$. Si sabes cómo hallar el área de un segmento circular, no te harán falta integrales.

---

16) Calcula $\int f$ donde $f(x) = e^{2x}/\sqrt{e^x + 1}$.

Hagamos el cambio $e^x + 1 = t^2$ para quitar la exponencial y la raíz. Despejando, $x = \log(t^2 - 1)$ y al derivar $dx = \frac{2t}{t^2-1}\,dt$. Al sustituir, la integral se simplifica enormemente:

$$\int \frac{(t^2-1)^2}{t} \cdot \frac{2t}{t^2-1}\,dt = 2\int (t^2-1)\,dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t + K.$$

Deshaciendo el cambio, el resultado final es $\frac{2}{3}\big(\sqrt{e^x+1}\big)^3 - 2\sqrt{e^x+1} + K$.

***17)** Calcula $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\,dx$ y $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx$ y explica geométricamente por qué son iguales.

Ambas dan $\frac{3\pi}{16}$. Coinciden porque las gráficas son una simétrica de la otra y entonces limitan la misma área.

***18)** Encuentra una primitiva de $\cos^5 x \operatorname{sen}^3 x$.

Todas las primitivas son $-\frac{1}{6}\cos^5 x + \frac{1}{8}\cos^8 x + K$.

***19)** Halla el valor de $\int_0^{3\pi/2} |\operatorname{sen} x|^3\,dx$.

La integral es 2.

---

20) Considera la parte de la parábola $y = 1 - x^2$ en el primer cuadrante. Halla el volumen del sólido que genera cuando gira alrededor del eje X y cuando lo hace alrededor del eje Y.

Según la fórmula, el volumen cuando gira alrededor del eje X viene dado por

$$V_x = \pi \int_0^1 (1-x^2)^2\,dx = \pi \int_0^1 (1-2x^2+x^4)\,dx = \pi\Big(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\Big) = \frac{8\pi}{15}.$$

Para hallar el volumen cuando gira alrededor del eje Y, despejamos la x obteniendo $x = \sqrt{1-y}$ y procedemos de la misma manera:

$$V_y = \pi \int_0^1 (\sqrt{1-y})^2\,dx = \pi \int_0^1 (1-y)\,dy = \pi\Big(1-\frac{1}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Los límites no han cambiado porque $x=0 \Rightarrow y=1$ y $x=1 \Rightarrow y=0$.

---

21) Calcula el área que limitan las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ para $x \in [0,\pi]$.

Con un dibujo es fácil ver que g queda por encima en $[0,\pi/4]$ y por debajo en $[\pi/4,\pi]$. Entonces el área es

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx = (\operatorname{sen} x + \cos x)\big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \operatorname{sen} x)\big|_{\pi/4}^{\pi}.$$

Sustituyendo, resulta $(\sqrt{2}-1) + (1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

---

22) Obtén la fórmula para el volumen de la esfera de radio R empleando integrales.

Dicha esfera se obtiene girando la semicircunferencia $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$ en el intervalo $[-R,R]$. Por tanto, su volumen es

$$\pi \int_{-R}^{R} (R^2-x^2)\,dx = \pi\Big(R^2x - \frac{1}{3}x^3\Big)\Big|_{-R}^{R} = \frac{4\pi}{3}R^3.$$

---

23) Halla el área limitada entre la parábola $y = \frac{4}{3}x^2$ y la recta $2x+3y=2$.

La recta es $y = (2-2x)/3$. Cuando igualamos ambas ecuaciones se obtiene que hay coincidencias en $x=-1$ y en $x=1/2$. Fuera de este intervalo la parábola está por encima y tiende a ∞, por tanto, el área limitada está en $x \in [-1,1/2]$ donde la parábola está por debajo. Así pues, el área es

$$\int_{-1}^{1/2} \Big(\frac{1}{3}(2-2x) - \frac{4}{3}x^2\Big)\,dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^{1/2} (1-x-2x^2)\,dx.$$

Esta integral es elemental, resultando

$$\frac{2}{3}\Big(x-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\Big)\Big|_{-1}^{1/2}=\frac{2}{3}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{12}-\Big(-1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\Big)\Big)=\frac{3}{4}.$$

---

24) Determina el volumen del sólido infinito obtenido al girar la gráfica de la función $f(x)=(x^2+5x+6)^{-1/2}$ alrededor del eje X en $x>0$.

De acuerdo con la fórmula, el volumen pedido es

$$V=\pi\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+5x+6}.$$

El denominador se factoriza como $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ y usando la descomposición en fracciones simples,

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x+3},\qquad 1=A_1(x+3)+A_2(x+2).$$

Sustituyendo $x=-2$ y $x=-3$ se sigue $A_1=1$ y $A_2=-1$. Por tanto,

$$V=\pi\big(\log|x+2|-\log|x+3|\big)\Big|_0^\infty=\pi\log\frac{|x+2|}{|x+3|}\Big|_0^\infty.$$

Evaluar en ∞ hay que entenderlo como un límite. Como $(x+2)/(x+3)\to 1$ cuando $x\to\infty$ y $\log 1=0$, el resultado es $V=-\pi\log\frac{2}{3}=\pi\log\frac{3}{2}$.

***25)** Calcula el valor de $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx$ explicando por qué es convergente.

La integral es 2. Converge porque decae más rápido que cualquier potencia.

---

26) Calcula $\int_{-\infty}^{-2}(x+2)2^x\,dx$.

Antes de comenzar, escribimos $2^x=e^{x\log 2}$, porque $2=e^{\log 2}$, y así la función será más familiar. Aplicamos integración por partes con $u=x+2$ y $dv=e^{x\log 2}\,dx$. De esta forma, $v=(\log 2)^{-1}e^{x\log 2}$ (salvo sumar constantes. La integral indefinida es, por tanto,

$$\int(x+2)2^x\,dx=(x+2)\frac{1}{\log 2}e^{x\log 2}-\frac{1}{\log 2}\int e^{x\log 2}\,dx.$$

La última integral es, de nuevo, $(\log 2)^{-1}e^{x\log 2}+K$ y resulta

$$\int (x+2)2^x\,dx = \frac{1}{(\log 2)^2}\big((x+2)\log 2-1\big)e^{x\log 2} = \frac{1}{(\log 2)^2}\frac{(x+2)\log 2-1}{e^{-x\log 2}}.$$

La motivación para el último paso es que así se ve más claro (por la regla de L'Hôpital) que el límite cuando $x\to-\infty$ es nulo. En definitiva, basta sustituir $x=-2$ y el resultado es:

$$-\frac{1}{e^{2\log 2}(\log 2)^2} = -\frac{1}{\big(e^{\log 2}\big)^2(\log 2)^2} = -\frac{1}{4(\log 2)^2}.$$

***27)** Decide si $\int_0^\infty \frac{x+2}{\sqrt{x^4+x+1}}\,dx$ es convergente.

Es divergente. El denominador no se anula y para x grande es comparable con $x/\sqrt{x^4}=1/x$.

***28)** Estudia la convergencia de $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{\sqrt[3]{x^7}}\,dx$. Indicación: Nota que $(1-\cos x)/x^2$ tiene límite finito no nulo cuando $x\to 0$.

La integral converge. Se puede dividir en dos: $\int_0^1+\int_1^\infty$. La primera converge acotando superiormente por $(1-\cos x)/x^2$, gracias a lo que dice la indicación, y la segunda converge acotando por $2/x^{7/3}$.
